



ECOLE DOCTORALE SCIENCES ET INGENIERIE
De l'Université de Cergy-Pontoise

THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de docteur de l'université de Cergy-Pontoise
Spécialité : Traitement des Images et du Signal

MÉTHODES PARAFAC GÉNÉRALISÉES POUR L'EXTRACTION AVEUGLE DE SOURCES. APPLICATION AUX SYSTÈMES DS-CDMA.

par
Dimitri Nion

Laboratoire des Equipes de Traitement des Images et du Signal(ETIS) - UMR CNRS 8051

18 Octobre 2007

Devant le jury composé de :

M. L. DE LATHAUWER,
MME I. FIJALKOW,
M. P. LOUBATON,
M. P. COMON,
M. E. MOREAU,
M. P. CHEVALIER,
M. J. BLANC-TALON,

Directeur de Thèse
Directrice de Thèse
Président du Jury
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur

Résumé

L'objet de cette thèse est le développement de méthodes PARAFAC généralisées pour l'extraction aveugle de sources dans les systèmes de communications sans fil où au moins trois diversités sont disponibles à la réception. Nous nous situons dans un contexte multi-utilisateurs qui communiquent simultanément dans la même bande de fréquences vers une station de base réceptrice équipée d'un réseau d'antennes. Si les signaux reçus sont de type CDMA, les diversités spatiales et temporelles ainsi que la diversité de code confèrent au signal global reçu une structure multilinéaire, résultant du mélange des signaux de tous les utilisateurs. Étant données ces trois diversités, on peut en effet stocker les échantillons de ce signal dans un tenseur des observations d'ordre 3, c'est à dire un cube. Le contexte aveugle de notre approche implique que ni les séquences d'apprentissage ni les codes CDMA des utilisateurs ne sont connus au niveau du récepteur.

Pour estimer les symboles transmis par les utilisateurs, nous exploitons uniquement la structure algébrique multilinéaire du tenseur des observations. Le problème consiste à décomposer ce tenseur en une somme de contributions, où chaque contribution caractérise entièrement un utilisateur dans les trois dimensions. Toutefois, la séparation des signaux est effective uniquement si la décomposition tensorielle est unique.

Jusqu'à présent, cette approche multilinéaire a été utilisée en télécommunications pour des canaux de propagation non-sélectifs en fréquence. Dans ce cas, la séparation des signaux d'intérêt peut être réalisée par la décomposition PARAFAC du tenseur des observations, qui est également utilisée dans de nombreux autres domaines tels que la chimiométrie ou le traitement d'image.

L'objectif central de cette thèse est de développer des récepteurs algébriques multilinéaires, afin de réaliser conjointement la séparation et l'égalisation aveugles des signaux CDMA transmis dans un canal à trajets multiples engendrant de l'Interférence Entre Symboles (IES).

L'idée principale est de construire des décompositions tensorielles plus générales que PARAFAC, afin de prendre en compte ce modèle de propagation. Notre approche est déterministe, ce qui signifie qu'elle peut être utilisée pour des séquences courtes, limitant ainsi la contrainte de stationnarité temporelle du canal pendant la durée d'observation.

Dans un premier temps, nous montrons que pour un scénario de propagation par trajets multiples, les contributions des utilisateurs ne sont pas des tenseurs de rang 1 comme dans le cas PARAFAC, mais ont des structures plus complexes, constituées de composantes matricielles et tensorielles. La solution au problème de séparation et d'égalisation aveugles peut ainsi être obtenue par une nouvelle décomposition tensorielle du tenseur des observations : la décomposition en composantes blocs. On dit alors que ce tenseur suit un modèle en composantes blocs, une généralisation du modèle PARAFAC. L'analyse en composantes blocs peut également être adoptée dans d'autres systèmes où au moins trois diversités sont exploitables (par exemple la diversité de code remplacée par une diversité de sur-échantillonnage temporel).

Dans un second temps, nous nous intéressons au développement d'algorithmes robustes pour le calcul de la nouvelle décomposition. Nous proposons d'abord un algorithme des moindres carrés alternés (ALS pour "Alternating Least Squares"). Cependant, cet algorithme présente les mêmes inconvénients que son équivalent pour PARAFAC : sensibilité aux minima locaux et

au conditionnement des données. Nous montrons alors que l'insertion d'une étape de recherche linéaire avec pas optimal complexe avant chaque étape de l'ALS permet d'accélérer considérablement la convergence. En outre, nous proposons également l'adaptation d'une méthode d'optimisation de type Gauss-Newton au calcul de la décomposition en blocs : l'algorithme de Levenberg-Marquardt. L'intérêt de cet algorithme est sa convergence quadratique dans les itérations finales, ainsi que sa robustesse aux données mal-conditionnées et à l'effet "near-far". Enfin, nous montrons que la diagonalisation conjointe d'un système de matrices permet également de calculer la nouvelle décomposition. Cette approche implique notamment une nouvelle borne d'unicité de la décomposition, c'est à dire un plus grand nombre d'utilisateurs simultanément admissibles dans le système.

Abstract

The goal of this PhD. Thesis is to develop generalized PARAFAC decompositions for blind source extraction in wireless communication systems, where at least three diversities are available at the receiver. We assume that several users transmit at the same time within the same bandwidth towards an antenna array. In the case of CDMA signals, the spatial, temporal and code diversities give a multilinear structure to the global received signal, which itself results from a mixture of users' signals. Given these 3 diversities, we can store the samples of this global signal in a third order tensor, i.e., a cube. The blind context of our approach implies that neither the learning sequences nor the CDMA codes are known by the receiver. In order to blindly estimate the symbols of each user, we only exploit the multilinear algebraic structure of the observation tensor. The problem consists of decomposing this tensor in a sum of users' contributions. However, the separation of all signals can be done only if the tensor decomposition is unique.

Until now, the multilinear approach has been used in wireless communications for instantaneous channels. In this case, the separation of users' signals can be done by means of the PARAFAC decomposition, which is commonly used in other applications such as chemometrics or image processing.

The main objective of this Thesis is to develop multilinear algebraic receivers in order to perform the blind separation-equalization of CDMA signals transmitted through a multipath propagation channel with Inter-Symbol-Interference. The main idea is to build tensor decompositions more general than PARAFAC to take this propagation scenario into account. Our approach is deterministic so it can be used with short symbol-sequences, which means that the channel does not need to be stationary over long periods.

In a first step, we show that, under the multipath propagation scenario assumption, users' contributions are not rank 1 tensors as in PARAFAC. These contributions have in fact a more complex structure since they are built from matrix and tensor components. The solution can thus be obtained by the decomposition of the Block Component Model (BCM), which generalizes PARAFAC.

In a second step, we develop several algorithms for the computation of the BCM. We first propose an Alternating Least Squares (ALS) algorithm. However, this algorithm has some draw-

backs such as sensitivity to local minima and ill-conditioned data. We then insert a Line Search scheme with optimal complex step before each ALS iteration, which speeds up convergence. Finally, we adapt a Gauss-Newton type optimization technique, the Levenberg-Marquardt algorithm, which provides quadratic convergence properties and is less sensitive to the near-far effect.

Finally, we show that the BCM decomposition can also be calculated by a simultaneous matrix diagonalization technique. This approach implies a new, more relaxed, bound on the number of users that are simultaneously allowed in the communication system.

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement :

- Les membres du jury pour leur venue ce jeudi 18 octobre 2007, malgré des conditions difficiles en ce jour de grève nationale.
- Lieven De Lathauwer et Inbar Fijalkow, pour leur patience, leur disponibilité et leurs conseils avisés lors de ces trois années.
- Ma famille, pour le soutien moral qu'elle m'a continuellement apporté.
- L'ensemble de mes collègues du laboratoire ETIS, pour leur sympathie et leur capacité d'écoute.

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Contexte scientifique	2
1.2	La séparation aveugle : formulation matricielle	3
1.3	Formulation tensorielle	5
1.4	Principaux objectifs et résultats	5
1.4.1	De nouvelles décompositions tensorielles	5
1.4.2	De nouveaux algorithmes	6
1.4.3	Une nouvelle borne d'unicité	7
1.5	Plan du document	8
1.6	Publications de l'auteur	8
2	Notations et Définitions	10
2.1	Notations	10
2.2	Définitions	11
3	Les Décompositions Tensorielles	15
3.1	Introduction	15
3.2	Décomposition PARAFAC	17
3.2.1	Principe	17
3.2.2	Unicité	18
3.3	Décomposition en termes blocs de rang-(L,L,1)	19
3.3.1	Principe	19
3.3.2	Unicité	21
3.4	Décomposition en termes blocs de rang-(L,P,.)	22
3.4.1	Principe	22
3.4.2	Unicité	23
3.5	Décomposition en termes blocs de rang-(L,M,N)	24
3.5.1	Principe	24
3.5.2	Unicité	25
3.6	Calcul par EVD - Initialisation	25
3.6.1	EVD-PARAFAC	25
3.6.2	EVD-BCM(L,L,1)	27
3.6.3	EVD-BCM(L,P,.)	28

3.6.3.1	Réduction de dimensions	28
3.6.3.2	Décomposition en valeurs propres	29
3.7	Conclusion	32
4	Applications aux Systèmes CDMA	34
4.1	Introduction	34
4.2	Transmission de signaux CDMA	36
4.2.1	Système coopératif vs. système aveugle	36
4.2.2	Modélisation tensorielle	38
4.2.3	Expression analytique du signal transmis	40
4.3	Canal sans-mémoire	40
4.3.1	Modèle analytique	40
4.3.2	Modèle tensoriel équivalent : PARAFAC	41
4.4	Canal multi-trajets avec réflexions dans le champ lointain	42
4.4.1	Modèle analytique	42
4.4.2	Modèle tensoriel équivalent : BCM-($L, L, 1$)	42
4.5	Canal multi-trajets avec réflexions non uniquement dans le champ lointain	43
4.5.1	Modèle analytique	43
4.5.2	Modèle tensoriel équivalent : BCM-($L, P, .$)	44
4.6	Conclusion	45
5	Les Algorithmes de Calcul des Décompositions Tensorielles	46
5.1	Introduction	46
5.2	L'algorithme ALS	47
5.2.1	ALS-PARAFAC	47
5.2.2	ALS-BCM($L, L, 1$)	48
5.2.3	ALS-BCM($L, P, .$)	50
5.2.4	ALS-BCM(L, M, N)	51
5.2.5	Inconvénients de l'ALS	52
5.3	Ajout d'une étape de Recherche Linéaire optimisée	52
5.3.1	Principe	52
5.3.2	Recherche linéaire optimisée avec pas complexe (ELSCS)	53
5.3.3	Calcul du pas complexe	55
5.3.4	Schéma de l'algorithme ALS+ELSCS	56
5.4	L'algorithme de Levenberg-Marquardt (LM)	58
5.4.1	Principe général	58
5.4.2	Application à la décomposition PARAFAC	61
5.4.2.1	Construction du Jacobien	61
5.4.2.2	Construction du gradient	62
5.4.3	Application au calcul du BCM-($L, L, 1$)	63
5.4.3.1	Construction du Jacobien	63
5.4.3.2	Construction du gradient	64
5.4.4	Application au calcul du BCM-($L, P, .$)	64

5.4.5	Illustration des performances	65
5.5	Compression des données par SVD	65
5.5.1	Compression selon la dimension longue	66
5.5.2	Compression selon le rang	67
5.6	Simulations sur des données non bruitées	69
5.6.1	Critère d'arrêt	69
5.6.2	Impact de l'initialisation	70
5.6.3	Impact du conditionnement d'une matrice de données	70
5.6.4	Impact de l'effet Near-Far	72
5.7	Simulations de Monte Carlo sur des données bruitées	74
5.7.1	Impact de l'initialisation	75
5.7.2	Impact de l'effet near-far	76
5.7.3	Impact du nombre d'antennes et d'utilisateurs	77
5.8	Conclusion	77
6	Liens entre Décompositions Tensorielles et Diagonalisation Simultanée	80
6.1	Introduction	80
6.2	SD-PARAFAC	81
6.3	SD-BCM(L,L,1) avec $R \leq \min(IJ, K)$	83
6.3.1	Reformulation du problème	83
6.3.2	Résolution pour $L = 2$	85
6.3.3	Construction de l'algorithme pour $L = 2$	87
6.3.3.1	Construction des tenseurs $\mathcal{M}_r, r = 1 \dots R$	87
6.3.3.2	Réduction de la taille du système (6.26)	88
6.3.3.3	Synopsis de l'algorithme pour $L = 2$	89
6.3.4	Une nouvelle borne d'unicité	89
6.3.4.1	Borne expérimentale pour $L = 2$	89
6.3.4.2	Borne analytique pour $L = 2$	90
6.3.4.3	Borne analytique $\forall L$	91
6.4	Résultats de simulations	92
6.5	Conclusion	93
7	Conclusion	95
7.1	Contributions	95
7.2	Perspectives	97
7.2.1	Applications	97
7.2.2	Suivi de sous-espaces	97
	Bibliographie	99
	Annexe	107
A	Preuve du Théorème 6.2	107

B	Eléments de Preuve de la Conjecture 6.3
----------	--

112

Table des figures

2.1	Les 3 représentations matricielles d'un tenseur d'ordre 3	13
3.1	Schéma de la décomposition PARAFAC d'un tenseur d'ordre 3	17
3.2	Schéma du BCM-(L,L,1)	20
3.3	Schéma du BCM-(L,P,.)	22
3.4	Schéma du BCM-(L,M,N)	24
3.5	Représentation de \mathcal{Y} après réduction des dimensions	30
4.1	Modèle de transmission en bande de base des signaux CDMA	37
4.2	Construction du tenseur des observations	39
4.3	Décomposition en termes de rang- $(L_r, L_r, 1)$ avec structure Toeplitz sur \mathbf{S}_r	43
4.4	Décomposition en termes de rang- $(L_r, P_r, .)$ avec structure Toeplitz sur \mathbf{S}	44
5.1	Convergence typique de l'ALS : évolution de ϕ pour des données non bruitées	53
5.2	Convergence typique des algorithmes avec Line Search	57
5.3	Convergence typique de l'algorithme de Levenberg-Marquardt	66
5.4	Illustration du temps de calcul par itération avec ou sans compression	68
5.5	Evolution typique de ϕ pour 3 initialisations différentes	71
5.6	Impact de $\kappa(\mathbf{A})$ sur le nombre d'itérations	72
5.7	Impact de l'effet Near-Far sur des données non bruitées	74
5.8	Impact de l'initialisation sur les performances ($\kappa(\mathcal{Y}) = 1$)	76
5.9	Impact de l'effet near-far	77
5.10	Impact du nombre d'antennes et d'utilisateurs	78
6.1	Valeur maximum de R pour garantir l'unicité de PARAFAC	83
6.2	Valeur maximum de R pour garantir l'unicité du BCM-(L,L,1)	91
6.3	Evolution de e en fonction de σ_N	93

Liste des tableaux

3.1	Contraintes pour utiliser la technique de calcul par EVD	33
4.1	Association entre modèles de propagation et récepteurs tensoriels	45
6.1	Borne expérimentale pour l'unicité du BCM-(2,2,1)	90
7.2	Tableau synthétique des contributions de ce document	96

Acronymes

ALS	Alternating Least Squares
BCM	Block Component Model
BCM-(L,L,1)	Block Component Model with rank-(L,L,1) terms
BCM-(L,P,.)	Block Component Model with rank-(L,P,.) terms
BCM-(L,M,N)	Block Component Model with rank-(L,M,N) terms
BER	Bit Error Rate
BPSK	Binary Phase Shift Keying
DS-CDMA	Direct Sequence - Code Division Multiple Access
ELSCS	Enhanced Line Search with Complex Step
EVD	Eigenvalue Decomposition
IES	Interférence-Entre-Symboles
LM	Levenberg Marquardt
MMSE	Minimum Mean Square Error
PARAFAC	Parallel Factor Analysis
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying
SD	Simultaneous Diagonalization
SNR	Signal to Noise Ratio
SVD	Singular Value Decomposition
UMTS	Universal Mobile Telecommunication System

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte scientifique

En traitement du signal pour les télécommunications sans fil, la conception de systèmes à grande efficacité spectrale garantissant un accès simultané à plusieurs utilisateurs dans la même bande de fréquences est essentielle.

Parmi les techniques d'accès multi-utilisateurs existantes, l'étalement de spectre par codage CDMA (Code Division Multiple Access) est actuellement utilisée dans les systèmes civils de communications mobiles de troisième génération (UMTS) [1]. Dans la liaison montante, le récepteur reçoit ainsi un mélange des signaux transmis simultanément par tous les utilisateurs. Ces signaux sont affectés par les effets du canal de propagation tels que les atténuations et les retards dus à la propagation par trajets multiples ainsi que par le bruit thermique provenant notamment des composants analogiques de la chaîne de communication.

Le signal global reçu par la station de base doit donc être traité numériquement de manière à

- i) isoler la contribution de chaque utilisateur : c'est l'étape de **séparation** ou d'**extraction** de sources.

- ii) identifier le filtre caractérisant le canal de propagation pour annuler l'Interférence Entre Symboles (IES) engendrée par les trajets multiples : il s'agit de l'étape d'**égalisation**.

Dans les systèmes dits **coopératifs**, la séparation est effectuée en exploitant la connaissance des codes CDMA alloués aux utilisateurs tandis que l'égalisation est effectuée à l'aide d'une séquence d'apprentissage. Cette dernière est transmise périodiquement par les utilisateurs et subit elle-même les effets du canal. La connaissance à la réception de la séquence d'apprentissage originale permet ainsi d'identifier le canal et d'en compenser les effets sur les données "utiles" transmises.

Cependant, cette séquence doit être transmise d'autant plus fréquemment que le canal varie rapidement au cours du temps, à cause par exemple du mouvement des utilisateurs. Ainsi, environ 25 % du débit total disponible est consacré à l'apprentissage en GSM et jusqu'à 50 % en UMTS.

Dans ce contexte, les **méthodes aveugles** suscitent un vif intérêt en traitement du signal pour les télécommunications car elles consistent à effectuer les opérations de séparation et d'égalisation sans utiliser la connaissance des codes CDMA ni celle des séquences d'apprentissage

à la réception. Dans le domaine civil, ces méthodes peuvent donc contribuer de manière significative à l'augmentation du débit utile soit en supprimant les séquences d'apprentissage (méthodes "purement" aveugles), soit en réduisant leur taille (méthodes "semi-aveugles"). Dans le domaine militaire, l'approche aveugle peut être utilisée pour intercepter des communications et permettre une écoute discrète, dans la mesure où la connaissance des codes CDMA n'est pas requise.

Outre la problématique d'accès multiple, les nouveaux systèmes de communication doivent répondre à un besoin sans cesse croissant en terme de débit. Depuis l'avènement des techniques MIMO [2], les systèmes multi-antennes sont en plein essor car l'utilisation de plusieurs antennes à l'émission et à la réception permet d'améliorer significativement l'efficacité spectrale.

Les travaux menés au cours de cette thèse visent à développer des méthodes aveugles pour des systèmes de communications MIMO-CDMA. L'aspect fondamental et novateur de notre approche réside dans l'utilisation de l'algèbre multilinéaire, particulièrement adaptée aux systèmes où plusieurs diversités peuvent être exploitées simultanément.

1.2 La séparation aveugle : formulation matricielle

De manière générale, la séparation aveugle de sources consiste à estimer des signaux inconnus uniquement à partir d'un mélange observé de ces signaux. Classiquement, ce problème est formulé de manière algébrique matricielle sous la forme $\mathbf{Y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}$, où l'objectif est d'identifier la matrice de mélange \mathbf{H} et/ou la matrice des sources \mathbf{S} uniquement à partir de la matrice des observations \mathbf{Y} fournies par le (ou les) capteur(s). Selon l'application considérée, ces matrices n'ont pas la même interprétation.

L'application sans doute la plus connue est le "cocktail party problem". Supposons que l'on place plusieurs microphones dans une pièce où plusieurs personnes parlent simultanément. L'enregistrement de chaque microphone est un brouhaha résultant d'un mélange de toutes les voix. En utilisant tous les enregistrements, il est cependant possible de retrouver le discours de chaque locuteur. Dans cette application, la matrice \mathbf{Y} collecte les échantillons de tous les enregistrements et la matrice \mathbf{S} collecte les échantillons du discours de tous les locuteurs présents. La matrice de mélange \mathbf{H} inconnue dépend de l'acoustique de la pièce et de l'emplacement des microphones. En pratique, la réverbération des voix sur les murs provoque un effet d'écho sur chaque enregistrement. Dans ce cas, la matrice \mathbf{Y} résulte d'un mélange convolutif si bien qu'il faut résoudre un problème de déconvolution, outre le problème initial de séparation. Si au contraire les réverbérations sont négligées, on dit que le mélange est instantané. Le nombre de capteurs K et de sources à estimer R ont une réelle importance dans la formulation matricielle car ils conditionnent les dimensions de \mathbf{H} et donc l'inversibilité du problème. On dit que le mélange est sur-déterminé si $K \geq R$ et qu'il est sous-déterminé si $K < R$.

Il existe de nombreuses autres applications de la séparation aveugle de sources. Par exemple, dans le domaine biomédical, ces méthodes peuvent être utilisées pour séparer le battement de coeur d'un fœtus de celui de sa mère [3]. Il existe également des applications en sismologie [4], ou encore en mécanique pour détecter un défaut sur des machines tournantes [5,6].

Dans le domaine des communications sans fil, la séparation aveugle de sources fait également

l'objet de nombreux travaux de recherche. Dans ce cas, la matrice \mathbf{Y} représente par exemple les observations fournies par le réseau d'antennes réceptrices. La matrice \mathbf{H} caractérise le canal de propagation et la matrice \mathbf{S} contient les symboles numériques transmis [7,8].

Les techniques dites à “sous-espaces” sont fondamentales pour la résolution du problème de factorisation matricielle $\mathbf{Y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}$ [9–11].

On distingue classiquement deux grandes approches : l'approche purement statistique et l'approche purement déterministe.

Le concept fondamental de l'approche statistique est “l'Analyse en Composantes Indépendantes”, notée ACI [12]. L'idée de l'ACI est d'extraire du mélange observé des composantes aussi indépendantes que possibles, en supposant que les sources présentes dans le mélange sont elles-mêmes statistiquement indépendantes. L'ACI est classiquement effectuée grâce à l'utilisation des statistiques d'ordre deux [13–15] ou d'ordre supérieur [16–23].

L'approche purement déterministe repose quant à elle sur la structure algébrique des signaux eux-mêmes et non sur la structure algébrique de leurs statistiques.

Observons d'abord que la matrice \mathbf{Y} peut aussi s'écrire $\mathbf{Y} = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{P}^{-1}) \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S})$, où la matrice non-singulière \mathbf{P} représente l'indétermination intrinsèque à la factorisation matricielle. En calculant la SVD de \mathbf{Y} on peut estimer les sous-espaces $Col(\mathbf{H})$ et $Col(\mathbf{S})$. Les matrices \mathbf{H} et \mathbf{S} consistent alors en des combinaisons linéaires inconnues des vecteurs de ces sous-espaces. Cependant, toute matrice \mathbf{P} choisie dans l'ensemble des matrices non-singulières de taille $R \times R$ mène à la même matrice \mathbf{Y} . Les matrices \mathbf{H} et \mathbf{S} ne peuvent donc être a priori estimées qu'à cette indétermination près. Pour restreindre cette indétermination, on peut imposer des propriétés déterministes connues sur les matrices \mathbf{H} et/ou \mathbf{S} . On peut par exemple s'appuyer sur l'hypothèse que les éléments de \mathbf{S} appartiennent à un alphabet fini ou ont un module constant [24–26]. De plus, si \mathbf{H} ou \mathbf{S} ont une structure particulière (Toeplitz, Van der Monde, ...), on peut également forcer cette structure de manière à réduire l'indétermination [7, 27, 28].

Certes, les méthodes statistiques et déterministes ne sont pas disjointes et peuvent être combinées. Toutefois, les premières nécessitent en général un plus grand nombre d'observations (i.e. d'échantillons) que les secondes, durant lesquelles la matrice de mélange est considérée comme temporellement stationnaire. Les méthodes déterministes peuvent fonctionner sur des trames très courtes, ce qui limite la contrainte de stationnarité temporelle du canal. De plus, si le modèle statistique des données n'est pas connu ou s'il ne peut pas être estimé de façon fiable, recourir à une approche déterministe est une solution adéquate.

Les méthodes déterministes nécessitent une modélisation précise et réaliste du problème. Ainsi, dans la mesure où les dimensions des matrices impliquées dépendent de certains paramètres du système, ceux-ci doivent être connus ou estimés préalablement.

Les méthodes aveugles développées dans ce manuscrit sont purement déterministes. L'originalité de celles-ci réside dans la formulation algébrique du problème sous une forme tensorielle, par contraste avec la formulation matricielle précédente.

1.3 Formulation tensorielle

L'idée de base dans les systèmes MIMO est le traitement spatio-temporel, où le temps (dimension naturelle) est complété par une dimension spatiale inhérente à l'utilisation de plusieurs antennes. Or, dans le cas de signaux CDMA transmis vers un réseau d'antennes, une troisième dimension (la dimension du code) peut aussi être exploitée.

Par conséquent, les diversités spatiale, temporelle et de codage confèrent au signal global reçu une **structure algébrique multilinéaire**. Ainsi, lorsque trois diversités peuvent être exploitées simultanément à la réception, les échantillons de ce signal peuvent être stockés dans un tenseur d'ordre 3 (i.e. un cube) qui possède une structure algébrique beaucoup plus riche qu'un tenseur d'ordre 2 (i.e. une matrice).

Ce tenseur des observations résulte d'une somme des contributions de tous les utilisateurs qui communiquent simultanément. Résoudre le problème de séparation et d'égalisation aveugles consiste alors à **décomposer le tenseur des observations** de manière à estimer ces contributions.

Sidiropoulos, Giannakis et Bro furent les premiers à adopter une technique d'algèbre multilinéaire dans le domaine des télécommunications [29]. Ils ont montré que pour chaque utilisateur, l'estimation aveugle conjointe des symboles, du code CDMA et de la réponse des antennes réceptrices peut être obtenue par la décomposition en termes de rang 1 d'un tenseur d'ordre trois ou **décomposition PARAFAC** (pour PARAllel FACtor) [30]. Cette formulation n'est toutefois valable que pour un canal non-sélectif en fréquence.

1.4 Principaux objectifs et résultats

Les travaux effectués durant cette thèse sont une généralisation des travaux de [29]. L'objectif est de développer des **récepteurs algébriques multilinéaires** pour la **séparation et l'égalisation aveugles** conjointes de signaux CDMA reçus par un réseau d'antennes, après propagation dans un canal sélectif en fréquence engendrant de l'IES. L'axe central de nos travaux consiste à développer de nouvelles décompositions tensorielles généralisant PARAFAC, afin de prendre en compte **ces modèles de propagation plus réalistes, où trajets multiples et IES sont présents**. Nous nous situons dans un contexte multi-utilisateurs, ceux-ci communiquant simultanément dans la même bande passante vers le réseau d'antennes réceptrices.

1.4.1 De nouvelles décompositions tensorielles

Dans un premier temps, nous avons montré que pour un scénario de propagation par trajets multiples, les contributions des utilisateurs ne sont pas des tenseurs de rang 1 comme dans le cas PARAFAC, mais ont des structures plus complexes, constituées de composantes matricielles et tensorielles. Nous avons ainsi introduit un nouveau modèle multilinéaire généralisant PARAFAC, le modèle en composantes blocs ou **BCM** pour "**Block Component Model**" [31–35]. L'analyse en composantes blocs peut être adoptée dans d'autres systèmes où au moins trois diversités sont exploitables (par exemple la diversité de code remplacée par une diversité de

sur-échantillonnage temporel) et où le modèle PARAFAC n'est pas suffisant pour représenter les signaux présents.

L'idée générale peut donc être résumée ainsi : en exploitant les diversités disponibles à la réception, on peut collecter les échantillons du signal global reçu dans un tenseur des observations ; la décomposition de celui-ci en composantes blocs permet ensuite d'exhiber les contributions de tous les utilisateurs présents dans le mélange et d'en estimer les symboles de manière aveugle. Toutefois, la structure du tenseur des observations diffère selon le scénario de propagation envisagé. Nous avons considéré les deux scénarii suivants, dans la liaison montante :

S1 : Les réflexions dues aux trajets multiples ont lieu uniquement dans le champ lointain des antennes réceptrices et engendrent de l'IES (milieu rural),

S2 : Les réflexions dues aux trajets multiples ont lieu non uniquement dans le champ lointain des antennes et engendrent de l'IES (milieu urbain).

Pour le modèle de propagation S1, la solution est obtenue par la décomposition en termes de rang- $(L,L,1)$ du tenseur des observations, notée **BCM- $(L,L,1)$** pour "**Block Component Model with rank- $(L,L,1)$ terms**" [36–38]. Dans ce cas, la contribution de chaque utilisateur est caractérisée par 2 matrices de rang L ainsi que par un vecteur, où L est la longueur de la Réponse Impulsionnelle (R.I.) du canal équivalent discret en nombre de périodes symboles. La première matrice représente la convolution du code CDMA par la R.I. du canal sélectif en fréquence (diversité de code ou de sur-échantillonnage). La seconde matrice représente les symboles transmis avec IES (diversité temporelle). Le vecteur collecte le gain des antennes (diversité spatiale).

Pour le modèle de propagation S2, la solution est obtenue par la décomposition en termes de rang- $(L,P,.)$, notée **BCM- $(L,P,.)$** pour "**Block Component Model with rank- $(L,P,.)$ terms**" [31,32]. Dans ce cas, la contribution de chaque utilisateur est caractérisée par 2 matrices de rangs respectifs L et P , et par un tenseur. L a la même signification que dans le modèle précédent. La matrice de rang L contient les symboles transmis avec IES. P est le nombre de trajets discrets vus par les antennes, chacun avec son propre angle d'incidence sur le réseau d'antennes. La matrice de rang P contient la réponse des antennes selon l'angle d'arrivée des P trajets. Enfin, le tenseur représente le canal global sélectif en fréquence.

Notons que ces nouveaux outils mathématiques dépassent de loin le contexte applicatif exposé dans cette thèse, à savoir le traitement du signal pour les télécommunications. En effet, dans la mesure où le champ applicatif de la décomposition PARAFAC s'est considérablement élargi depuis 1970 (chimométrie, imagerie spectrale, représentation de séquences vidéo, reconnaissance de visages, traitement de données multivariées, etc), les outils que nous proposons ouvrent de nouvelles perspectives de recherche dans ces domaines.

1.4.2 De nouveaux algorithmes

Dans le cas de la décomposition PARAFAC, la conception d'algorithmes de calcul robustes et rapides a donné lieu à de nombreux travaux de recherche [39–46]. Le développement de tels algorithmes pour le calcul des nouvelles décompositions tensorielles s'inscrit donc naturellement dans notre démarche.

Nous avons d'abord développé un algorithme des moindres carrés alternés (**ALS** pour "Alter-

nating Least Squares”) pour le calcul de la décomposition du BCM. Cependant, cet algorithme présente les mêmes inconvénients que son équivalent pour PARAFAC : sensibilité aux minima locaux et au conditionnement des données.

Nous avons ensuite proposé d’insérer une étape de recherche linéaire avec pas optimal complexe (**ELSCS** pour “Enhanced Line Search with Complex Step”) avant chaque étape de l’ALS. L’algorithme résultant est nommé **ALS+ELSCS**. Cette technique est une généralisation de la méthode ELS (pour “Enhanced Line Search”) proposée dans [40, 41]. L’étape ELSCS s’applique ainsi aux tenseurs complexes du modèle PARAFAC ou BCM. Cette étape est très peu coûteuse et permet d’accélérer considérablement la convergence.

Ensuite, nous avons adapté une méthode d’optimisation de type Gauss-Newton au calcul du BCM, l’algorithme de Levenberg-Marquardt, noté **LM**. L’intérêt de cet algorithme est sa convergence quadratique dans les itérations finales, ainsi que sa robustesse aux données mal-conditionnées et à l’effet near-far [31, 47]. Il reste toutefois relativement coûteux en temps de calcul pour des données de grande taille.

Dans cette optique, nous avons montré qu’une étape préalable de réduction des dimensions du tenseur avant le calcul de sa décomposition permet d’alléger considérablement le coût de calcul sans perte significative sur la précision finale.

Enfin, pour chaque modèle multilinéaire considéré, nous proposons une technique de calcul basée sur la décomposition en valeurs propres (EVD). Cette technique simple et non-itérative n’est utilisable que si certaines conditions sur les dimensions du tenseur des observations sont respectées. Si le tenseur des observations n’est entâché d’aucun bruit, i.e., la décomposition est exacte, alors celle-ci peut être calculée par simple EVD matricielle. Si au contraire le tenseur initial est bruité, cette technique peut être utilisée pour initialiser les algorithmes itératifs d’optimisation.

1.4.3 Une nouvelle borne d’unicité

Enfin, nous nous sommes intéressés à l’unicité des décompositions en blocs. Cet aspect est primordial car les décompositions tensorielles se doivent d’être unique pour permettre l’identifiabilité de toutes les contributions présentes dans le mélange.

Pour le modèle PARAFAC, il a été montré récemment [42, 43, 48] que la décomposition peut être calculée par la résolution d’un système de matrices à diagonaliser conjointement. Il s’avère que cette approche implique une nouvelle borne sur le nombre d’utilisateurs simultanément admissibles dans le système, beaucoup moins contraignante que la borne de Kruskal [49].

Dans la continuité de cette démarche, nous avons montré que la décomposition du BCM-(L,L,1) peut également être calculé par diagonalisation simultanée (**SD**) [50]. Outre un nouvel algorithme, nous prouvons l’existence d’une nouvelle borne d’unicité pour ce modèle, moins contraignante que la condition suffisante démontrée dans [34].

1.5 Plan du document

Le document est organisé de la manière suivante. Dans le chapitre 2, nous introduisons les notations et les définitions d’algèbre multilinéaire qui sont utilisées dans ce manuscrit.

Dans le chapitre 3, nous rappelons le principe de la décomposition PARAFAC puis nous introduisons les modèles en composantes blocs BCM. Nous détaillons également la technique de calcul par EVD pour ces modèles.

Dans le chapitre 4, nous exposons le problème de séparation et d’égalisation aveugles de signaux CDMA d’un point de vue analytique, puis du point de vue algébrique tensoriel équivalent. Dans le cas d’un canal non-sélectif en fréquences, nous rappelons que la solution est trouvée par la décomposition PARAFAC. Dans le cas d’un canal sélectif en fréquences avec réflexions dans le champ lointain, nous montrons que le modèle BCM-(L,L,1) est adéquat. Dans le cas d’un canal sélectif en fréquences avec réflexions non uniquement dans le champ lointain, nous montrons que le modèle BCM-(L,P,.) est adéquat.

Dans le chapitre 5, nous proposons plusieurs algorithmes itératifs pour le calcul des décompositions tensorielles. L’algorithme ALS standard est d’abord développé. Puis nous montrons comment une étape de recherche linéaire peut être insérée dans l’ALS. Nous adaptons ensuite l’algorithme de Levenberg-Marquardt au calcul des décompositions blocs. Enfin, nous montrons comment la SVD matricielle permet de compresser le tenseur des observations. Nous concluons ce chapitre par des résultats de simulations.

Dans le chapitre 6, nous établissons un lien entre la décomposition du BCM-(L,L,1) et la diagonalisation simultanée d’un système de matrices. Par cette approche, nous prouverons l’existence d’une nouvelle borne d’unicité pour cette décomposition, et nous donnerons l’expression analytique de cette borne.

1.6 Publications de l’auteur

Conférences

- [1] D. Nion and L. De Lathauwer, “Generalized PARAFAC decompositions for blind multi-user access in wireless communications”, Workshop on Tensor Decompositions and Applications, Luminy, Marseille, France, 2005.
- [2] D. Nion and L. De Lathauwer, “A Block Factor Analysis Based Receiver for Blind Multi-User Access in Wireless Communications”, in Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), pp. 825–828, Toulouse, France, May 2006.
- [3] D. Nion and L. De Lathauwer, “Line Search Computation of the Block Factor Model for Blind Multi-User Access in Wireless Communications”, in Proc. of IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC), July 2-5, Cannes, France, 2006.
- [4] D. Nion and L. De Lathauwer, “Levenberg-Marquardt Computation of the Block Factor

Model for Blind Multi-User Access in Wireless Communications”, in Proc. of European Signal Processing Conference (EUSIPCO), September 4-8, Florence, Italy, 2006.

[5] D. Nion and L. De Lathauwer, “A Tensor-Based Blind DS-CDMA Receiver using Simultaneous Matrix Diagonalization”, IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC), June 17-20, Helsinki, Finland, 2007.

[6] D. Nion and L. De Lathauwer, “Séparation et égalisation aveugles de signaux CDMA par la décomposition en blocs d'un tenseur au moyen de l'algorithme de Levenberg-Marquardt”, XXIème colloque GRETSI, Troyes, France, September 11-14, 2007.

[7] D. Nion and L. De Lathauwer, “Tensor-based Blind CDMA Receivers”, Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Nov. 4-7, 2007, Pacific Grove, CA, USA, invited paper, in preparation.

Revues

[1] L. De Lathauwer and D. Nion, “Decompositions of a Higher-Order Tensor in Block Terms – Part III : Alternating Least Squares Algorithms”, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2006, accepted.

[2] D. Nion and L. De Lathauwer, “A Block Component Model Based Blind DS-CDMA Receiver”, IEEE Trans. Signal Proc., 2007, second stage of revision.

[3] D. Nion and L. De Lathauwer, “An enhanced line search scheme for complex-valued tensor decompositions. Application in DS-CDMA”, Signal Processing, 2007, accepted.

[4] D. Nion and L. De Lathauwer, “A simultaneous matrix diagonalization technique for the decomposition of a higher-order tensor in rank-(L,L,1) terms”, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2007, submitted.

Chapitre 2

Notations et Définitions

2.1 Notations

\mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels. \mathbb{C} désigne l'ensemble des nombres complexes. On désignera par $[1 : R]$ l'ensemble des entiers de 1 à R .

Les tenseurs seront notés par des lettres calligraphiques \mathcal{T} , les matrices par des majuscules grasses \mathbf{M} , les vecteurs par des minuscules grasses \mathbf{v} et les scalaires par des minuscules en italique s . D'autre part, la i ème colonne d'une matrice \mathbf{M} sera notée \mathbf{m}_i , le i ème élément d'un vecteur \mathbf{v} sera noté v_i et l'élément d'indice (i, j) d'une matrice \mathbf{M} sera noté m_{ij} . L'ensemble des colonnes c_1 à c_2 de \mathbf{M} est la matrice notée $[\mathbf{M}]_{:,c_1:c_2}$. L'ensemble des lignes r_1 à r_2 de \mathbf{M} est la matrice notée $[\mathbf{M}]_{r_1:r_2,:}$. Les majuscules italiques seront utilisées pour noter le plus grand élément d'un ensemble d'entiers $i \in [1 : I]$.

Le produit d'Hadamard, ou produit élément par élément sera noté $*$. L'espace généré par les colonnes d'une matrice sera noté $Col(\mathbf{M})$ et celui généré par les lignes $Row(\mathbf{M})$.

Le conjugué d'un élément s sera noté s^* et son module $|s|$. La transposée de la matrice \mathbf{M} sera notée \mathbf{M}^T , sa conjuguée \mathbf{M}^* , sa transposée hermitienne \mathbf{M}^H et sa pseudo-inverse \mathbf{M}^\dagger .

L'opérateur vec permet d'écrire une matrice sous forme de vecteur par concaténation de toutes ses colonnes. Si \mathbf{M} est une matrice de taille $I \times J$, les éléments du vecteur $vec(\mathbf{M})$ sont ainsi définis par $(vec(\mathbf{M}))_{i+(j-1)I} = m_{ij}$. L'opérateur inverse de vec sera noté $unvec$.

L'opérateur $diag$ range un vecteur sur la diagonale d'une matrice diagonale. De même, l'opérateur $blockdiag$ range ses arguments (matrices ou vecteurs) dans une matrice bloc-diagonale, i.e.

$$blockdiag(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_R) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{A}_R \end{bmatrix}.$$

2.2 Définitions

Définition 2.1. (Produit de Kronecker) *Le produit de Kronecker, noté \otimes , de deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} de tailles respectives $I \times J$ et $K \times L$ est une matrice de taille $IK \times JL$ définie par :*

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1J}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2J}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1}\mathbf{B} & a_{I2}\mathbf{B} & \cdots & a_{IJ}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Par convention d'écriture, lorsque nous donnons les dimensions d'une matrice partitionnée, l'indice le plus à gauche est celui qui varie le plus lentement et celui le plus à droite le plus rapidement. Ainsi, nous noterons $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{IK \times JL}$ pour signifier que lors de la désignation d'une ligne de $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, l'indice $i \in [1 : I]$ varie plus lentement que $k \in [1 : K]$ et lors de la désignation d'une colonne de $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, $j \in [1 : J]$ varie plus lentement que $l \in [1 : L]$. Par extension les dimensions de $\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$ sont notées $KI \times LJ$.

Définition 2.2. (Produit de Khatri-Rao) *Le produit de Khatri-Rao [51], noté \odot , de deux matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times R}$ et $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{J \times R}$ est une matrice de taille $IJ \times R$ définie par :*

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = (\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{a}_J \otimes \mathbf{b}_J).$$

Le produit de Khatri-Rao de deux matrices existe si ces matrices ont le même nombre de colonnes.

Définition 2.3. (Produit de Kronecker par blocs) *Le produit de Kronecker par blocs, noté \odot_R , de deux matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times RM}$ et $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{J \times RN}$ qui consistent en la concaténation de R matrices $\mathbf{A}_r \in \mathbb{C}^{I \times M}$ et $\mathbf{B}_r \in \mathbb{C}^{J \times N}$, $r \in [1 : R]$, est une matrice de taille $(IJ \times RMN)$ définie par*

$$\mathbf{A} \odot_R \mathbf{B} = [\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{A}_R \otimes \mathbf{B}_R].$$

Définition 2.4. (Tenseur d'ordre N) *Un tenseur d'ordre N est un tableau à N dimensions, i.e. ses éléments sont désignés par N indices. Ainsi un vecteur est un tenseur d'ordre 1, une matrice un tenseur d'ordre 2, un cube un tenseur d'ordre 3.*

Définition 2.5. (Produit extérieur) *Le produit extérieur $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})$ d'un tenseur d'ordre P noté $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_P}$ et d'un tenseur d'ordre Q noté $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_Q}$ est un tenseur d'ordre $P + Q$ défini par*

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})_{i_1 i_2 \dots i_P j_1 j_2 \dots j_Q} = a_{i_1 i_2 \dots i_P} b_{j_1 j_2 \dots j_Q},$$

pour toutes les valeurs des indices. Ainsi, le produit extérieur $(\mathbf{a} \circ \mathbf{b} \circ \mathbf{c})$ des vecteurs $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{I \times 1}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{J \times 1}$ et $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{K \times 1}$, est un tenseur $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ d'ordre 3 dont les éléments sont définis par

$$t_{ijk} = a_i b_j c_k.$$

Définition 2.6. (Tenseur de rang 1) Un tenseur \mathcal{T} d'ordre N est de rang 1 s'il peut s'écrire comme le produit extérieur de N vecteurs, $\mathcal{T} = \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2 \circ \dots \circ \mathbf{a}_N$.

Ainsi, un tenseur d'ordre trois $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ est de rang 1 si ces éléments peuvent s'écrire comme $t_{ijk} = a_i b_j c_k$, où $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{I \times 1}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{J \times 1}$ et $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{K \times 1}$.

Cette définition généralise la définition d'une matrice de rang 1 : $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{I \times J}$ est de rang 1 si $\mathbf{M} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T$.

Définition 2.7. (Rang d'un tenseur) Le rang d'un tenseur \mathcal{T} est défini comme le nombre minimum de tenseurs de rang 1 qui génèrent \mathcal{T} par combinaison linéaire.

Définition 2.8. (Produit en mode-1) Le produit en mode-1 d'un tenseur d'ordre trois $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{L \times M \times N}$ par une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times L}$, noté $\mathcal{T} \bullet_1 \mathbf{A}$, est un tenseur de taille $(I \times M \times N)$ dont les éléments sont définis par

$$(\mathcal{T} \bullet_1 \mathbf{A})_{imn} = \sum_{l=1}^L t_{lmn} a_{il}.$$

De même, le produit en mode-2 de \mathcal{T} par une matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{J \times M}$ et le produit en mode-3 de \mathcal{T} par une matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{K \times N}$ sont des tenseurs de tailles respectives $(L \times J \times N)$ et $(L \times M \times K)$ dont les éléments sont définis par

$$(\mathcal{T} \bullet_2 \mathbf{B})_{ljn} = \sum_{m=1}^M t_{lmn} b_{jm},$$

$$(\mathcal{T} \bullet_3 \mathbf{C})_{lmk} = \sum_{n=1}^N t_{lmn} c_{kn}.$$

Avec cette notation, le produit matriciel $\mathbf{M} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^T$ s'écrit aussi $\mathbf{M} = \mathbf{S} \bullet_1 \mathbf{U} \bullet_2 \mathbf{V}$.

Définition 2.9. (Rang de Kruskal d'une matrice) Le rang de Kruskal d'une matrice \mathbf{A} , ou k -rang de \mathbf{A} , noté $k(\mathbf{A})$, est défini comme le nombre maximum tel que tout ensemble composé de k colonnes de \mathbf{A} soit linéairement indépendant [49].

Le k -rang d'une matrice est toujours inférieur ou égal à son rang.

Exemple : Soit la matrice \mathbf{A} de taille 2×3 définie par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

\mathbf{A} est de rang 2 mais de k -rang 1 car ses deux dernières colonnes ne sont pas indépendantes.

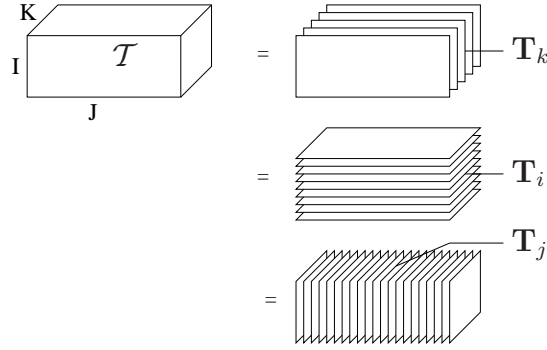


FIG. 2.1 – Les 3 représentations matricielles d'un tenseur d'ordre 3

Définition 2.10. (Norme Frobenius) La norme Frobenius $\|\cdot\|_F$ d'un tenseur $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ d'ordre trois est définie par

$$\|\mathcal{T}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K |t_{ijk}|^2}.$$

Définition 2.11. (Représentation matricielle d'un tenseur d'ordre 3) Les représentations matricielles d'un tenseur $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$, notées $(\mathcal{T})_{IK \times J} = \mathbf{T}_{IK \times J}$, $(\mathcal{T})_{JI \times K} = \mathbf{T}_{JI \times K}$ et $(\mathcal{T})_{KJ \times I} = \mathbf{T}_{KJ \times I}$, de tailles respectives $(IK \times J)$, $(JI \times K)$ et $(KJ \times I)$, sont définies par

$$\begin{cases} [\mathbf{T}_{IK \times J}]_{(i-1)K+k,j} = t_{ijk} \\ [\mathbf{T}_{JI \times K}]_{(j-1)I+i,k} = t_{ijk} \\ [\mathbf{T}_{KJ \times I}]_{(k-1)J+j,i} = t_{ijk} \end{cases},$$

pour $i \in [1 : I]$, $j \in [1 : J]$ et $k \in [1 : K]$. Comme illustré par la figure 2.1, les matrices $\mathbf{T}_{IK \times J}$, $\mathbf{T}_{JI \times K}$ et $\mathbf{T}_{KJ \times I}$ résultent respectivement de la concaténation en ligne des I tranches $\mathbf{T}_i \in \mathbb{C}^{K \times J}$, des J tranches $\mathbf{T}_j \in \mathbb{C}^{I \times K}$ et des K tranches $\mathbf{T}_k \in \mathbb{C}^{J \times I}$.

Définition 2.12. (Représentation vectorielle d'un tenseur d'ordre 3) Les représentations vectorielles d'un tenseur $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$, notées T_{JKI} , T_{KIJ} et T_{IJK} , sont définies par

$$\begin{cases} T_{JKI} = \text{vec}(\mathbf{T}_{IK \times J}) \\ T_{KJI} = \text{vec}(\mathbf{T}_{JI \times K}) \\ T_{IKJ} = \text{vec}(\mathbf{T}_{KJ \times I}) \end{cases},$$

pour $i \in [1 : I]$, $j \in [1 : J]$ et $k \in [1 : K]$.

Définition 2.13. (Tenseur Symétrique) Un tenseur \mathcal{T} d'ordre N est symétrique si ses éléments vérifient $(\mathcal{T})_{i_1, i_2, \dots, i_N} = (\mathcal{T})_{\Pi(i_1, i_2, \dots, i_N)}$ pour toute permutation Π des indices.

Définition 2.14. (Tenseur Diagonal) Un tenseur $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{I \times I \times \dots \times I}$ est diagonal si tous ses éléments qui ne sont pas désignés par le même indice dans toutes les dimensions sont nuls.

Définition 2.15. (Rang générique) *Le rang générique d'un tenseur est le rang obtenu en choisissant ses éléments aléatoirement selon une loi continue.*

Chapitre 3

Les Décompositions Tensorielles

3.1 Introduction

Dans de nombreux domaines tels que le traitement du signal, l'analyse multivariée ou la programmation scientifique, une représentation vectorielle ou matricielle des données est communément utilisée. Toutefois, un nombre croissant de problèmes implique la manipulation de données dont les éléments sont désignés par plus de deux indices [19, 29, 52–58]. Ainsi, un tenseur d'ordre N peut être considéré comme un tableau à N dimensions, dont chaque élément est désigné par N indices. Les vecteurs sont des tenseurs d'ordre 1, les matrices sont des tenseurs d'ordre 2, et on désigne par tenseur d'ordre supérieur (“Higher-Order-Tensor”) un tenseur d'ordre au moins égal à 3. L'algèbre des tenseurs d'ordre supérieur est appelée algèbre multilinéaire.

De même qu'une matrice peut être décomposée de multiples façons (SVD, EVD, QR, LU, etc) [59], il existe plusieurs décompositions tensorielles. La décomposition de Tucker [60, 61] et la HOSVD (pour “Higher Order Singular Value Decomposition”) [62] sont des généralisations possibles pour les tenseurs d'ordre supérieur de la SVD matricielle, avec certaines contraintes sur les composantes. Parmi les applications de la HOSVD et de la décomposition de Tucker, on trouve par exemple la reconnaissance de visages [55], le débruitage d'images et de signaux sismologiques [63], l'analyse en composantes indépendantes [64], le filtrage multi-dimensionnel de données multivariées [65], etc.

La décomposition PARAFAC (pour “Parallel Factor”) [30, 39, 56, 66–68] ou CANDECAMP (pour “Canonical Decomposition”) [69] consiste à écrire un tenseur comme une somme d'un nombre minimal de tenseurs de rang 1 et en ce sens, elle constitue également une généralisation possible de la SVD matricielle.

Introduite pour la première fois en 1927 [67, 68], puis réintroduite en 1970 [30, 69], cette décomposition tensorielle est la plus connue. Elle est utilisée dans de nombreuses applications telles que la Psychométrie [69], la Phonétique [30], la chimiométrie et l'industrie alimentaire [56, 66], la séparation de sources et l'analyse en composantes indépendantes [12, 20, 54, 70–72], les télécommunications [29, 48, 57, 73, 74], le calcul scientifique [75, 76] etc.

Dans le domaine des télécommunications, la décomposition PARAFAC a été utilisée pour la première fois en 2000 [29, 57]. Elle est utilisée dans [29] pour estimer de manière aveugle les signaux CDMA transmis simultanément par plusieurs utilisateurs vers un réseau d'antennes

dans un canal non-sélectif en fréquence. Les auteurs se sont appuyés sur l'observation que les diversités spatiale, temporelle et de codage confèrent au signal reçu une structure tridimensionnelle suivant la décomposition PARAFAC. La décomposition PARAFAC du tenseur des observations permet d'écrire celui-ci comme une somme de contributions de rang 1, où chaque contribution caractérise un utilisateur précis. L'aspect crucial de cette technique est l'exploitation simultanée des trois diversités disponibles, ce qui permet d'estimer de manière aveugle les symboles de chaque utilisateur ainsi que le canal associé et la réponse des antennes. En outre, les conditions d'unicité de la décomposition n'imposent pas de contrainte d'orthogonalité sur les composantes inconnues (par exemple, les codes CDMA peuvent être aléatoires) ni d'indépendance statistique sur les différentes sources. L'identifiabilité repose en fait sur une borne d'unicité qui s'interprète comme une limite supérieure au nombre de contributions que l'on peut extraire du tenseur des observations. Dans l'application de [29], cette borne correspond au nombre maximum d'utilisateurs qui peuvent communiquer simultanément dans le système.

Cependant, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, si le canal de propagation est caractérisé par des trajets multiples dont l'étalement des délais provoque une Interférence Entre Symboles (IES) à la réception, la décomposition PARAFAC ne peut pas être utilisée. En effet, comme nous le détaillerons dans le chapitre 4, il s'avère que dans ce cas le tenseur des observations résulte d'une somme de contributions qui ne sont pas de rang 1. Partant de ce constat, l'axe central de nos travaux est le développement de nouvelles décompositions tensorielles généralisant la décomposition PARAFAC, afin de prendre en compte ce scénario de propagation.

Dans ce chapitre, nous présentons ces nouvelles décompositions d'un tenseur d'ordre 3 sous un angle mathématique. Les applications de ces décompositions seront abordées dans le chapitre suivant.

Dans la section 3.2, nous rappelons d'abord le principe de la décomposition PARAFAC, ainsi que sa condition d'unicité.

Nous introduisons ensuite trois nouvelles décompositions qui généralisent PARAFAC : la décomposition en termes blocs de rang-(L,L,1) en section 3.3, la décomposition en termes blocs de rang-(L,P,.) en section 3.4 et la décomposition en termes blocs de rang-(L,M,N) en section 3.5. Ces nouvelles décompositions sont respectivement notées "BCM-(L,L,1)", "BCM-(L,P,.)" et "BCM-(L,M,N)", où BCM signifie "**B**lock **F**actor **M**odel", c'est à dire modèle en composantes blocs. Cette dénomination peut s'expliquer ainsi : les différentes contributions de la décomposition PARAFAC sont des tenseurs de rang 1, construits à partir de vecteurs. Par contraste, les contributions intervenant dans le BCM sont plus complexes car elles sont construites à partir de composantes blocs matricielles et tensorielles.

Enfin, dans la section 3.6, nous montrons que le calcul de ces décompositions peut être effectué par une technique non-itérative simple basée sur une EVD matricielle, si certaines conditions sur les dimensions sont vérifiées.

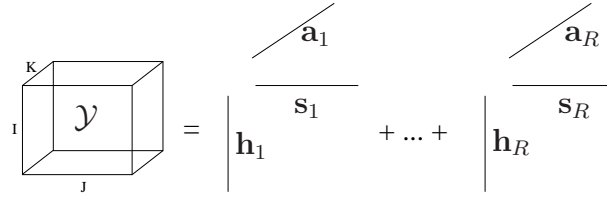


FIG. 3.1 – Schéma de la décomposition PARAFAC d'un tenseur d'ordre 3

3.2 Décomposition PARAFAC

3.2.1 Principe

La décomposition PARAFAC d'un tenseur \mathcal{Y} d'ordre N de taille $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N$ est la décomposition de ce tenseur sous forme de la somme d'un nombre minimum de tenseurs de rang un :

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R \mathbf{u}_r^{(1)} \circ \mathbf{u}_r^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_r^{(N)}, \quad (3.1)$$

où $\mathbf{u}_r^{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n}$, $r \in [1 : R]$, $n \in [1 : N]$.

Ce nombre minimum de termes correspond au rang du tenseur.

On notera par ailleurs $\mathbf{U}^{(n)}$ la matrice de taille $I_n \times R$ obtenue en concaténant les vecteurs $\mathbf{u}_1^{(n)}, \mathbf{u}_2^{(n)}, \dots, \mathbf{u}_R^{(n)}$, $n \in [1 : N]$.

Les tenseurs d'ordre 3 sont majoritairement utilisés dans la suite. La décomposition PARAFAC d'un tenseur \mathcal{Y} d'ordre 3, de taille $I \times J \times K$ et de rang R s'écrit :

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R \mathbf{h}_r \circ \mathbf{s}_r \circ \mathbf{a}_r, \quad (3.2)$$

où $\mathbf{h}_r \in \mathbb{C}^I$, $\mathbf{s}_r \in \mathbb{C}^J$, $\mathbf{a}_r \in \mathbb{C}^K$. Un schéma de la décomposition PARAFAC d'un tenseur d'ordre 3 est présenté dans la figure 3.1.

Soient $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times R}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times R}$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times R}$, les matrices contenant respectivement les vecteurs \mathbf{h}_r , \mathbf{s}_r et \mathbf{a}_r , $r \in [1 : R]$.

En termes de représentations matricielles du tenseur \mathcal{Y} , la décomposition PARAFAC peut s'écrire comme

$$\mathbf{Y}_{IK \times J} = (\mathbf{H} \odot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S}^T, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{Y}_{JI \times K} = (\mathbf{S} \odot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A}^T, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{Y}_{KJ \times I} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{H}^T. \quad (3.5)$$

Calculer la décomposition PARAFAC de \mathcal{Y} consiste à estimer les matrices \mathbf{H} , \mathbf{S} et \mathbf{A} , ce qui peut être fait par la minimisation de la fonction de coût suivante :

$$\phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = \|\mathcal{Y} - \sum_{r=1}^R \mathbf{h}_r \circ \mathbf{s}_r \circ \mathbf{a}_r\|_F^2. \quad (3.6)$$

Cette fonction de coût peut également s'écrire sous les trois formes équivalentes

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{Y}_{IK \times J} - (\mathbf{H} \odot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S}^T\|_F^2 \\ \phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{Y}_{JI \times K} - (\mathbf{S} \odot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A}^T\|_F^2 \\ \phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{Y}_{KJ \times I} - (\mathbf{A} \odot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{H}^T\|_F^2 \end{cases}$$

Dans le chapitre 5, nous donnerons plusieurs algorithmes itératifs permettant de calculer la décomposition PARAFAC par minimisation de cette fonction de coût.

3.2.2 Unicité

Etant donné la connaissance du tenseur des observations \mathcal{Y} d'ordre N , le calcul de sa décomposition PARAFAC donnée par l'équation (3.1) consiste à estimer les matrices $\mathbf{U}^{(n)}$, $n \in [1 : N]$, à partir desquelles il a été construit. La décomposition PARAFAC, comme toute décomposition tensorielle, se doit donc d'être unique pour que son calcul ait un sens. Une part importante des travaux de recherche en algèbre multilinéaire consiste ainsi à déterminer des conditions garantissant cette unicité. Avant d'énoncer brièvement à quelle condition la décomposition PARAFAC est unique, les deux points suivants méritent d'être soulignés.

D'une part, la décomposition d'une matrice en une somme de matrices de rang 1 n'est pas unique, sauf si l'on impose certaines contraintes fortes sur les matrices de la décomposition, par exemple une contrainte d'orthogonalité. Au contraire, l'unicité de la décomposition PARAFAC n'impose aucune contrainte d'orthogonalité sur les matrices $\mathbf{U}^{(n)}$.

D'autre part, la décomposition (3.1) n'est unique qu'à deux indéterminations près. En effet (3.1) peut aussi s'écrire

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R \left(\frac{1}{\alpha_r^{(1)} \alpha_r^{(2)} \dots \alpha_r^{(N)}} \right) (\alpha_r^{(1)} \mathbf{u}_r^{(1)} \circ \alpha_r^{(2)} \mathbf{u}_r^{(2)} \circ \dots \circ \alpha_r^{(N)} \mathbf{u}_r^{(N)}). \quad (3.7)$$

Si $\prod_{n=1}^N \alpha_r^{(n)} = 1$, les vecteurs $\alpha_r^{(n)} \mathbf{u}_r^{(n)}$ sont donc solutions au même titre que les vecteurs $\mathbf{u}_r^{(n)}$. Il s'agit de l'ambiguïté d'échelle. De plus l'ordre des termes $\mathbf{u}_r^{(1)} \circ \mathbf{u}_r^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{u}_r^{(N)}$ est arbitraire, il s'agit de l'ambiguïté de permutation. En résumé, les colonnes des matrices $\mathbf{U}^{(n)}$ peuvent être estimées à un facteur d'échelle et à une permutation près. Lorsque la décomposition est unique à ces deux indéterminations près, on dit qu'elle est *essentiellement unique*.

Dans un article fondamental [49], Kruskal énonce une condition suffisante garantissant l'unicité de la décomposition PARAFAC. Cette condition, est donnée par le Théorème 3.1.

Théorème 3.1 : *Soit un tenseur d'ordre N et de rang R , se décomposant sous la forme (3.1). Si*

$$\sum_{n=1}^N k(\mathbf{U}^{(n)}) \geq 2R + (N - 1), \quad (3.8)$$

alors cette décomposition est essentiellement unique. La partie droite de l'inéquation est connue sous le nom de borne de Kruskal. La partie gauche ne dépend que du k -rang des matrices de données.

Cette condition suffisante a d'abord été donnée à l'ordre 3 pour des tenseurs réels [49] puis plus tard à l'ordre 3 pour des tenseurs complexes [29] et à tout ordre pour des tenseurs complexes [77]. La preuve a ensuite été reformulée en termes d'algèbre linéaire de base [78].

Si le tenseur \mathcal{Y} est d'ordre 3, comme dans l'équation (3.2), la condition d'unicité (3.8) s'écrit :

$$k(\mathbf{H}) + k(\mathbf{S}) + k(\mathbf{A}) \geq 2(R + 1). \quad (3.9)$$

Si \mathbf{H} , \mathbf{S} et \mathbf{A} sont de rang plein (et donc de k -rang plein), alors (3.9) se réduit génériquement à

$$\min(I, R) + \min(J, R) + \min(K, R) \geq 2R + 2. \quad (3.10)$$

Récemment, une nouvelle borne d'unicité a été trouvée [43, 48]. Cette borne générique est donnée par le Théorème 3.2.

Théorème 3.2 : *La décomposition PARAFAC est essentiellement unique, au sens générique, si :*

$$R \leq \min(IK, J) \quad \text{et} \quad R(R - 1) \leq \frac{1}{2}I(I - 1)K(K - 1). \quad (3.11)$$

Notons que ce théorème s'applique si le tenseur a une dimension "longue" (on doit avoir ici $J \geq R$), les rôles de I , J et K étant interchangeables. Si la condition $R \leq \min(IK, J)$ est respectée, cette nouvelle borne est beaucoup moins contraignante que la borne de Kruskal car le nombre R de contributions pouvant être extraites du tenseur des observations est substantiellement plus élevé. La borne du Théorème 3.2 a été trouvée en reformulant le problème de la décomposition PARAFAC en terme d'un système de matrices à diagonaliser conjointement. Nous reviendrons sur cet aspect plus en détail dans le chapitre 6.

3.3 Décomposition en termes blocs de rang-(L,L,1)

3.3.1 Principe

La décomposition en termes blocs de rang-(L,L,1) d'un tenseur d'ordre trois $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$, notée BCM-(L,L,1) pour "Block Component Model with rank-(L,L,1) terms", est définie par

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R (\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{S}_r^T) \circ \mathbf{a}_r, \quad (3.12)$$

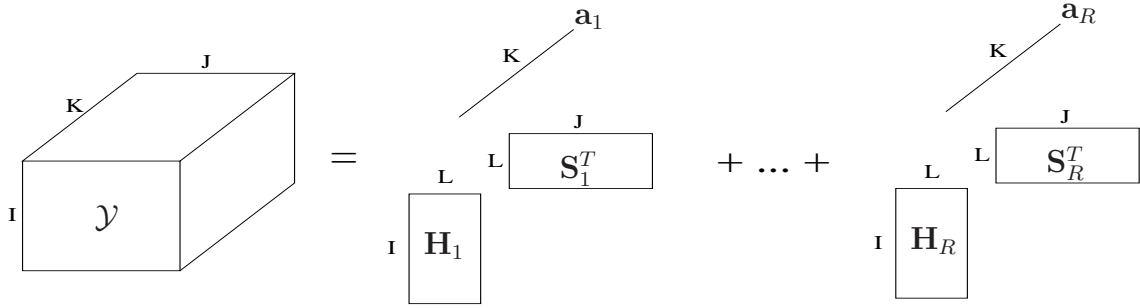


FIG. 3.2 – Schéma du BCM-(L,L,1)

ou de manière équivalente

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R \mathbf{H}_r \bullet_2 \mathbf{S}_r \bullet_3 \mathbf{a}_r, \quad (3.13)$$

où les matrices $\mathbf{H}_r \in \mathbb{C}^{I \times L}$ et $\mathbf{S}_r \in \mathbb{C}^{J \times L}$ sont de rang L et \mathbf{a}_r est un vecteur de taille $K \times 1$. Cette décomposition a été introduite dans le contexte des télécommunications [36–38, 79] et le formalisme mathématique a été plus amplement détaillé dans [33–35]. Un schéma de la décomposition d'un tenseur d'ordre 3 en termes de rang-(L,L,1) est présenté sur la figure 3.2. Définissons les matrices partitionnées $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 \dots \mathbf{H}_R]$ de taille $(I \times LR)$, $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \dots \mathbf{S}_R]$ de taille $(J \times LR)$ et $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_R]$ de taille $(K \times R)$. En termes des représentations matricielles de \mathcal{Y} , le BCM-(L,L,1) peut s'écrire comme

$$\mathbf{Y}_{IK \times J} = (\mathbf{H} \odot_R \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S}^T, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{Y}_{JI \times K} = [\text{vec}(\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{S}_1^T) \dots \text{vec}(\mathbf{H}_R \cdot \mathbf{S}_R^T)] \cdot \mathbf{A}^T, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{Y}_{KJ \times I} = (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{S}) \cdot \mathbf{H}^T. \quad (3.16)$$

Calculer la décomposition en termes de rang-(L,L,1) de \mathcal{Y} consiste à estimer les matrices \mathbf{H} , \mathbf{S} et \mathbf{A} , ce qui peut être fait par la minimisation de la fonction de coût suivante :

$$\phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = \|\mathcal{Y} - \sum_{r=1}^R (\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{S}_r^T) \circ \mathbf{a}_r\|_F^2. \quad (3.17)$$

Cette fonction de coût peut s'écrire de manière équivalente

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = & \|\mathbf{Y}_{IK \times J} - (\mathbf{H} \odot_R \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S}^T\|_F^2 \\ \phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = & \|\mathbf{Y}_{JI \times K} - [\text{vec}(\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{S}_1^T) \dots \text{vec}(\mathbf{H}_R \cdot \mathbf{S}_R^T)] \cdot \mathbf{A}^T\|_F^2 \\ \phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = & \|\mathbf{Y}_{KJ \times I} - (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{S}) \cdot \mathbf{H}^T\|_F^2 \end{cases} .$$

Dans le chapitre 5, nous donnerons plusieurs algorithmes itératifs permettant de minimiser cette fonction de coût.

3.3.2 Unicité

De même que la décomposition PARAFAC est unique à une ambiguïté d'échelle et de permutation, la décomposition du BCM-(L,L,1) est unique à deux indéterminations près.

D'une part, on peut permuer de manière arbitraire les R termes de rang-(L,L,1) dans l'équation (3.13). D'autre part, (3.13) peut aussi s'écrire

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R (\alpha_r^{-1} \mathbf{H}_r \cdot \mathbf{F}_r^{-1}) \bullet_2 (\mathbf{S}_r \cdot \mathbf{F}_r^T) \bullet_3 (\alpha_r \mathbf{a}_r), \quad (3.18)$$

si bien que les matrices $\alpha_r^{-1} \mathbf{H}_r \cdot \mathbf{F}_r^{-1}$ et $\mathbf{S}_r \cdot \mathbf{F}_r$, où $\mathbf{F}_r \in \mathbb{C}^{L \times L}$ est une matrice inversible, ainsi que les vecteurs $\alpha_r \mathbf{a}_r$, sont solutions au même titre que \mathbf{H}_r , \mathbf{S}_r et \mathbf{a}_r , $r \in [1 : R]$. Si la décomposition du BCM-(L,L,1) est unique à ces 2 indéterminations près, on dit qu'elle est *essentiellement unique*.

Comme pour le modèle PARAFAC, on entend par *essentiellement unique* l'idée que chaque contribution $\mathcal{Y}_r = \mathbf{H}_r \bullet_2 \mathbf{S}_r \bullet_3 \mathbf{a}_r$ est déterminée de manière unique, c'est à dire que les seules indéterminations existantes sont confinées à chacun des R blocs. En d'autres termes, la matrice \mathbf{A} est déterminée à une matrice diagonale permutée près, tandis que les matrices \mathbf{H} et \mathbf{S} sont déterminées à une matrice bloc-diagonale "bloc-permutée" près, i.e., seule la permutation de l'indice r est autorisée.

Le Théorème 3.3, démontré dans [34], énonce une condition suffisante garantissant l'unicité de la décomposition du BCM-(L,L,1).

Théorème 3.3 : *La décomposition d'un tenseur d'ordre 3 en termes de rang-(L,L,1) est essentiellement unique, au sens générique, si l'une de ces 4 conditions est vérifiée [34] :*

- (i) $\min(I, J) \geq LR$ et \mathbf{A} n'a pas de colonnes proportionnelles.
- (ii) $K \geq R$ et $\min(\lfloor \frac{I}{L} \rfloor, R) + \min(\lfloor \frac{J}{L} \rfloor, R) \geq R + 2$.
- (iii) $I \geq LR$ et $\min(\lfloor \frac{J}{L} \rfloor, R) + \min(K, R) \geq R + 2$
ou $J \geq LR$ et $\min(\lfloor \frac{I}{L} \rfloor, R) + \min(K, R) \geq R + 2$.
- (iv) $IJ \geq LR$ et $\min(\lfloor \frac{I}{L} \rfloor, R) + \min(\lfloor \frac{J}{L} \rfloor, R) + \min(K, R) \geq 2R + 2$.

De même que la borne de Kruskal a pu être assouplie pour le modèle PARAFAC, nous avons récemment montré [50] que la condition d'unicité du Théorème 3.3 peut également être assouplie, à condition que $R \leq \min(IJ, K)$. Cette nouvelle borne est donnée par le Théorème 3.4. La démarche qui a permis d'aboutir à cette nouvelle borne est la reformulation du calcul de la décomposition du BCM-(L,L,1) en terme d'un système de matrices à diagonaliser simultanément. Cet aspect constitue l'objet du chapitre 6.

Théorème 3.4 : *La décomposition d'un tenseur d'ordre trois en R termes de rang-(L,L,1) est essentiellement unique, au sens générique, si*

$$R \leq \min(IJ, K) \quad \text{et} \quad C_I^{L+1} \cdot C_J^{L+1} \geq C_{R+L}^{L+1} - R. \quad (3.19)$$

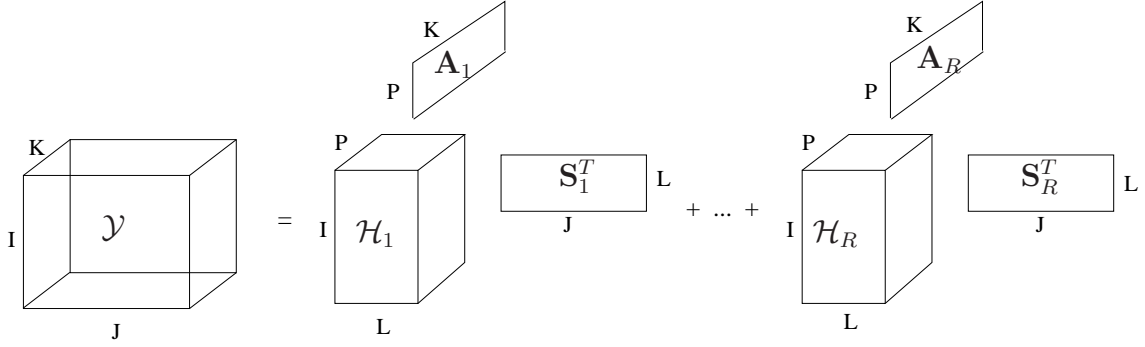


FIG. 3.3 – Schéma du BCM-(L,P,..)

Notons que la condition $R \leq \min(IJ, K)$ de ce théorème implique que la “longue” dimension est portée par les termes de rang 1. Ce théorème a été prouvé (cf Annexe) pour $L = 2$ tandis qu’il s’agit encore d’une conjecture pour $L > 2$.

3.4 Décomposition en termes blocs de rang-(L,P,..)

3.4.1 Principe

La décomposition en termes blocs de rang-(L,P,..) d’un tenseur $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$, notée BCM-(L,P,..) pour “Block Component Model with rank-(L,P,..) terms”, est définie par

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R \mathcal{H}_r \bullet_2 \mathbf{S}_r \bullet_3 \mathbf{A}_r, \quad (3.20)$$

où les tenseurs \mathcal{H}_r sont de taille $(I \times L \times P)$ et les matrices $\mathbf{S}_r \in \mathbb{C}^{J \times L}$ et $\mathbf{A}_r \in \mathbb{C}^{K \times P}$ sont respectivement de rang L et P , $r \in [1 : R]$.

Cette décomposition a été introduite dans le contexte des télécommunications [31, 32] et le formalisme mathématique a été plus amplement détaillé dans [33–35]. Un schéma de la décomposition d’un tenseur d’ordre 3 en termes de rang-(L,P,..) est présenté sur la figure 3.3.

Définissons les matrices partitionnées $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_R]$ de taille $(K \times RP)$ et $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \dots \mathbf{S}_R]$ de taille $(J \times RL)$. En termes des représentations matricielles de \mathcal{Y} , le BCM-(L,P,..) peut s’écrire comme

$$\mathbf{Y}_{IK \times J} = [(\mathcal{H}_1 \bullet_3 \mathbf{A}_1)_{IK \times L} \dots (\mathcal{H}_R \bullet_3 \mathbf{A}_R)_{IK \times L}] \cdot \mathbf{S}^T, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{Y}_{JI \times K} = [(\mathcal{H}_1 \bullet_2 \mathbf{S}_1)_{JI \times P} \dots (\mathcal{H}_R \bullet_2 \mathbf{S}_R)_{JI \times P}] \cdot \mathbf{A}^T, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{Y}_{KJ \times I} = (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{S}) \cdot \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_1)_{PL \times I} \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_R)_{PL \times I} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Dans l'équation 3.23, notons \mathbf{H}^T la matrice $\begin{pmatrix} (\mathcal{H}_1)_{PL \times I} \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_R)_{PL \times I} \end{pmatrix}$ de taille $RLP \times I$. Calculer la décomposition en termes de rang-(L,P,.) de \mathcal{Y} consiste à estimer les matrices $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times RL}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times RP}$ et $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times RLP}$, ce qui peut être fait par la minimisation de la fonction de coût suivante :

$$\phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = \|\mathcal{Y} - \sum_{r=1}^R \mathcal{H}_r \bullet_2 \mathbf{S}_r \bullet_3 \mathbf{A}_r\|_F^2. \quad (3.24)$$

Cette fonction de coût peut s'écrire de manière équivalente

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{Y}_{IK \times J} - [(\mathcal{H}_1 \bullet_3 \mathbf{A}_1)_{IK \times L} \dots (\mathcal{H}_R \bullet_3 \mathbf{A}_R)_{IK \times L}] \cdot \mathbf{S}^T\|_F^2 \\ \phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{Y}_{JI \times K} - [(\mathcal{H}_1 \bullet_2 \mathbf{S}_1)_{JI \times P} \dots (\mathcal{H}_R \bullet_2 \mathbf{S}_R)_{JI \times P}] \cdot \mathbf{A}^T\|_F^2 \\ \phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{Y}_{KJ \times I} - (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{S}) \cdot \mathbf{H}^T\|_F^2 \end{cases} .$$

Dans le chapitre 5, nous donnerons plusieurs algorithmes itératifs permettant de minimiser cette fonction de coût.

3.4.2 Unicité

Dans la définition (3.20) du BCM-(L,P,.), on peut permuter arbitrairement les termes de la somme, ce qui constitue l'ambiguïté de permutation. De plus (3.20) peut aussi s'écrire

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R (\mathcal{H}_r \bullet_2 \mathbf{F}_r^{-1} \bullet_3 \mathbf{G}_r^{-1}) \bullet_2 (\mathbf{S}_r \cdot \mathbf{F}_r) \bullet_3 (\mathbf{A}_r \cdot \mathbf{G}_r),$$

où les matrices d'indétermination $\mathbf{G}_r \in \mathbb{C}^{P \times P}$ et $\mathbf{F}_r \in \mathbb{C}^{L \times L}$ sont non-singulières. Ainsi, les matrices $\mathbf{A}_r \cdot \mathbf{G}_r$, $\mathbf{S}_r \cdot \mathbf{F}_r$ et les tenseurs $\mathcal{H}_r \bullet_2 \mathbf{F}_r^{-1} \bullet_3 \mathbf{G}_r^{-1}$, $r \in [1 : R]$, sont solutions au même titre que \mathbf{A}_r , \mathbf{S}_r et \mathcal{H}_r . Lorsque la décomposition de \mathcal{Y} en termes de rang-(L,P,.) est unique à ces 2 indéterminations près, on dit qu'elle est *essentiellement unique*.

Comme pour le modèle PARAFAC, on entend par *essentiellement unique* l'idée que chaque contribution $\mathcal{Y}_r = \mathcal{H}_r \bullet_2 \mathbf{S}_r \bullet_3 \mathbf{A}_r$ est déterminée de manière unique, c'est à dire que les seules indéterminations existantes sont confinées au sein de chacun des R blocs. En d'autres termes, les matrices \mathbf{A} et \mathbf{S} sont déterminées à une matrice bloc-diagonale "bloc-permutée" près, i.e., seule la permutation de l'indice r est autorisée.

Le théorème suivant a été prouvé dans [34].

Théorème 3.5 : *Si $\text{rank}(\mathbf{A}) = RP$, $\text{rank}(\mathbf{S}) = RL$, $I \geq 3$ et que les tenseurs \mathcal{H}_r , $r \in [1 : R]$, sont génériques, alors la décomposition en termes de rang-(L,P,.) est essentiellement unique. Dans les cas où la condition sur les rangs de \mathbf{A} et \mathbf{S} ne sont pas vérifiées, la décomposition est néanmoins essentiellement unique, au sens générique, si $I > L + P - 2$ et si*

$$\min \left(\left\lfloor \frac{J}{L} \right\rfloor, R \right) + \min \left(\left\lfloor \frac{K}{P} \right\rfloor, R \right) + \min \left(\left\lfloor \frac{I}{\max(L, P)} \right\rfloor, R \right) \geq 2R + 2. \quad (3.25)$$

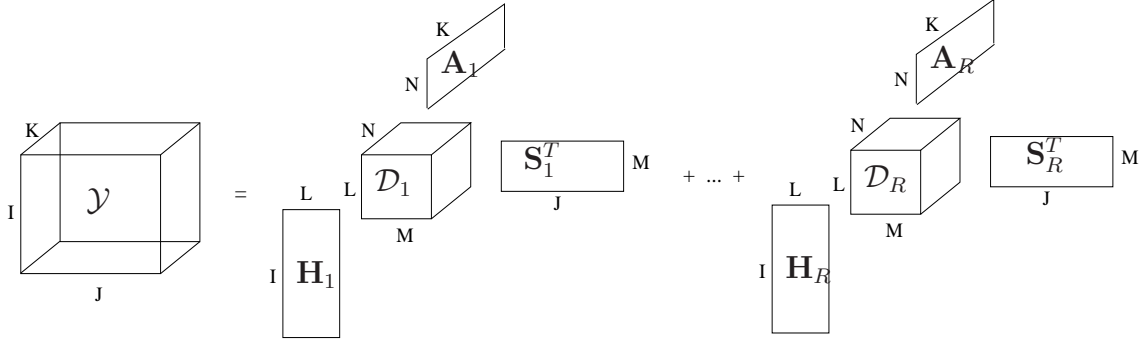


FIG. 3.4 – Schéma du BCM-(L,M,N)

3.5 Décomposition en termes blocs de rang-(L,M,N)

3.5.1 Principe

La décomposition en termes blocs de rang-(L,M,N) d'un tenseur $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$, notée BCM-(L,M,N) pour "Block Component Model with rank-(L,M,N) terms", est définie par

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R \mathcal{D}_r \bullet_1 \mathbf{H}_r \bullet_2 \mathbf{S}_r \bullet_3 \mathbf{A}_r, \quad (3.26)$$

où les tenseurs $\mathcal{D}_r \in \mathbb{C}^{L \times N \times N}$ sont de rang-(L,M,N) plein, et où les matrices $\mathbf{H}_r \in \mathbb{C}^{I \times L}$, $\mathbf{S}_r \in \mathbb{C}^{J \times M}$ et $\mathbf{A}_r \in \mathbb{C}^{K \times N}$, $r \in [1 : R]$, sont respectivement de rang L , M et N .

Cette décomposition a été introduite dans [33–35], où le formalisme mathématique y est détaillé. Un schéma de la décomposition d'un tenseur d'ordre 3 en termes de rang-(L,M,N) est présenté dans la figure 3.4.

Définissons les matrices partitionnées $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 \dots \mathbf{H}_R]$ de taille $(I \times RL)$, $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \dots \mathbf{S}_R]$ de taille $(J \times RM)$ et $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_R]$ de taille $(K \times RN)$. En termes des représentations matricielles de \mathcal{Y} , le BCM-(L,M,N) peut s'écrire comme

$$\mathbf{Y}_{IK \times J} = (\mathbf{H} \odot_R \mathbf{A}) \cdot \text{blockdiag}((\mathcal{D}_1)_{LN \times M}, \dots, (\mathcal{D}_R)_{LN \times M}) \cdot \mathbf{S}^T, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{Y}_{JI \times K} = (\mathbf{S} \odot_R \mathbf{H}) \cdot \text{blockdiag}((\mathcal{D}_1)_{ML \times N}, \dots, (\mathcal{D}_R)_{ML \times N}) \cdot \mathbf{A}^T, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{Y}_{KJ \times I} = (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{S}) \cdot \text{blockdiag}((\mathcal{D}_1)_{NM \times L}, \dots, (\mathcal{D}_R)_{NM \times L}) \cdot \mathbf{H}^T. \quad (3.29)$$

En terme de la représentation vectorielle Y_{IJK} de \mathcal{Y} , on a

$$Y_{IJK} = (\mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{H}_R \otimes \mathbf{S}_R \otimes \mathbf{A}_R) \cdot \begin{pmatrix} (\mathcal{D}_1)_{LMN} \\ \vdots \\ (\mathcal{D}_R)_{LMN} \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Calculer la décomposition en termes de rang-(L,M,N) de \mathcal{Y} consiste à estimer les matrices $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times RL}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times RM}$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{J \times RM}$ ainsi que les tenseurs \mathcal{D}_r , $r \in [1 : R]$, ce qui peut être fait par la minimisation de la fonction de coût suivante :

$$\phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = \|\mathcal{Y} - \sum_{r=1}^R \mathcal{D}_r \bullet_1 \mathbf{H}_r \bullet_2 \mathbf{S}_r \bullet_3 \mathbf{A}_r\|_F^2. \quad (3.31)$$

3.5.2 Unicité

Dans la définition (3.26) du BCM-(L,M,N), on peut permuter arbitrairement les termes de la somme, ce qui constitue l'ambiguïté de permutation. De plus (3.26) peut aussi s'écrire

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R (\mathcal{D}_r \bullet_1 \mathbf{U}_r^{-1} \bullet_2 \mathbf{V}_r^{-1} \bullet_3 \mathbf{W}_r^{-1}) \bullet_1 (\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{U}_r) \bullet_2 (\mathbf{S}_r \cdot \mathbf{V}_r) \bullet_3 (\mathbf{A}_r \cdot \mathbf{W}_r),$$

si bien que les matrices $\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{U}_r$, $\mathbf{S}_r \cdot \mathbf{V}_r$, $\mathbf{A}_r \cdot \mathbf{W}_r$ et les tenseurs $\mathcal{D}_r \bullet_1 \mathbf{U}_r^{-1} \bullet_2 \mathbf{V}_r^{-1} \bullet_3 \mathbf{W}_r^{-1}$, $r \in [1 : R]$, sont solutions au même titre que \mathbf{H}_r , \mathbf{S}_r , \mathbf{A}_r et \mathcal{D}_r . Lorsque la décomposition de \mathcal{Y} en termes de rang-(L,M,N) est unique à ces 2 indéterminations près, on dit qu'elle est *essentiellement unique*. Le théorème suivant a été prouvé dans [34], section 5.1.

Théorème 3.6 : *La décomposition de \mathcal{Y} en termes de rang-(L,M,N) est essentiellement unique, au sens générique, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (i) $L = M$ et $I \geq LR$ et $J \geq MR$ et $N \geq 3$ et \mathbf{C}_r est de rang N , $r \in [1 : R]$.
- (ii) $I \geq LR$ et $N > L + M - 2$ et $\min(\lfloor \frac{J}{M} \rfloor, R) + \min(\lfloor \frac{K}{N} \rfloor, R) \geq R + 2$
ou $J \geq MR$ et $N > L + M - 2$ et $\min(\lfloor \frac{I}{L} \rfloor, R) + \min(\lfloor \frac{K}{N} \rfloor, R) \geq R + 2$.
- (iii) $N > L + M - 2$ et $\min(\lfloor \frac{I}{L} \rfloor, R) + \min(\lfloor \frac{J}{M} \rfloor, R) + \min(\lfloor \frac{K}{N} \rfloor, R) \geq 2R + 2$.

3.6 Calcul par EVD - Initialisation

Dans cette section nous montrons que sous certaines contraintes sur les dimensions et si le modèle est exact (absence de bruit additif), il est possible de calculer les matrices des données (aux indéterminations près du modèle considéré) par une décomposition en valeurs propres (EVD). Si les contraintes sur les dimensions sont vérifiées mais que le tenseur des observations est bruité, les matrices estimées par cette technique peuvent être utilisées pour initialiser les algorithmes itératifs tels que ceux que nous proposons dans le chapitre 5. La technique par EVD a déjà été proposée pour le modèle PARAFAC et nous la généralisons aux modèles blocs.

3.6.1 EVD-PARAFAC

Le calcul de la décomposition PARAFAC par EVD a été notamment proposé dans [45]. Cette méthode n'est possible que si 2 des dimensions de \mathcal{Y} sont supérieures à son rang R . Supposons par exemple que $R \leq \min(I, J)$.

Pour $k = 1, \dots, K$, les K tranches matricielles $(I \times J)$ frontales $[\mathcal{Y}]_{:, :, k}$ de \mathcal{Y} peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{H}\mathbf{D}_1\mathbf{S}^T, \\ \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{H}\mathbf{D}_2\mathbf{S}^T, \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{Y}_K &= \mathbf{H}\mathbf{D}_K\mathbf{S}^T, \end{cases} \quad (3.32)$$

où \mathbf{D}_k est une matrice diagonale de taille $R \times R$ qui contient la k ème ligne de \mathbf{A} sur sa diagonale : $\mathbf{D}_k = \text{diag}([A]_{k, :})$.

Si le modèle PARAFAC est exact, alors 2 équations de (3.32) sont suffisantes pour trouver les matrices inconnues, à condition que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

(i) $R \leq \min(I, J)$, ce qui implique que le rang générique de $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times R}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times R}$ et de \mathbf{Y}_k est R .

(ii) Il existe au moins 2 indices k_1 et k_2 telles que \mathbf{D}_{k_1} et \mathbf{D}_{k_2} soient non-singulières, i.e., les lignes k_1 et k_2 de \mathbf{A} ne contiennent que des scalaires non nuls.

(iii) \mathbf{A} ne contient pas de colonnes colinéaires.

Considérons la k ième équation de (3.32). L'inverse de Moore-Penrose (ou pseudo-inverse) de \mathbf{Y}_k peut s'écrire comme

$$(\mathbf{Y}_k)^\dagger = (\mathbf{S}^T)^\dagger (\mathbf{D}_k)^\dagger \mathbf{H}^\dagger.$$

Les opérateurs \cdot^T et \cdot^\dagger peuvent commuter donc $(\mathbf{S}^T)^\dagger = (\mathbf{S}^\dagger)^T$ et puisque \mathbf{S} est de rang R , la matrice $(\mathbf{S}^H \mathbf{S})$ est non singulière. La pseudo-inverse à droite de \mathbf{S}^T s'écrit donc

$$(\mathbf{S}^T)^\dagger = (\mathbf{S}^\dagger)^T = \left((\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^H \right)^T = \mathbf{S}^* (\mathbf{S}^T \mathbf{S}^*)^{-1}.$$

Considérons maintenant deux tranches \mathbf{Y}_{k_1} et \mathbf{Y}_{k_2} de \mathcal{Y} . La combinaison des 2 équations correspondantes de (3.32) mène à :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{k_1} (\mathbf{Y}_{k_2})^\dagger &= (\mathbf{H}\mathbf{D}_{k_1}\mathbf{S}^T) \left(\mathbf{S}^* (\mathbf{S}^T \mathbf{S}^*)^{-1} \mathbf{D}_{k_2}^{-1} \mathbf{H}^\dagger \right) \\ &= \mathbf{H} (\mathbf{D}_{k_1} \mathbf{D}_{k_2}^{-1}) \mathbf{H}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Puisque \mathbf{A} ne contient pas de colonnes colinéaires, les éléments de $\mathbf{D}_{k_1} \mathbf{D}_{k_2}^{-1}$ sont mutuellement différents. Ainsi, \mathbf{H} peut être estimée (aux indéterminations près) comme les R vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles de la matrice $\mathbf{Y}_{k_1} (\mathbf{Y}_{k_2})^\dagger$ de taille $I \times I$ et de rang R . Une fois \mathbf{H} connue, on peut trouver \mathbf{S} en choisissant une équation de (3.32) :

$$\mathbf{S} = \mathbf{Y}_k^T (\mathbf{H}^T)^\dagger,$$

où la matrice \mathbf{D}_k a été ignorée car elle est diagonale et peut donc s'interpréter comme l'indétermination portant sur \mathbf{H} .

Enfin, on peut trouver \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = (\mathbf{Y}_{JI \times K})^T ((\mathbf{S} \odot \mathbf{H})^T)^\dagger. \quad (3.34)$$

D'un point de vue numérique, il est préférable de prendre en compte toutes les tranches dans (3.32) au lieu de 2 d'entre elles uniquement. Par exemple, si le modèle PARAFAC n'est qu'approximativement satisfait, à cause de la présence de bruit résiduel, il est clairement préférable d'exploiter toutes les informations disponibles. C'est l'approche proposée dans [44]. Ainsi, on peut construire le système suivant à partir de (3.32)

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_2(\mathbf{Y}_1)^\dagger &= \mathbf{H}(\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1^{-1})\mathbf{H}^\dagger \\ \mathbf{Y}_3(\mathbf{Y}_1)^\dagger &= \mathbf{H}(\mathbf{D}_3\mathbf{D}_1^{-1})\mathbf{H}^\dagger \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{Y}_K(\mathbf{Y}_1)^\dagger &= \mathbf{H}(\mathbf{D}_K\mathbf{D}_1^{-1})\mathbf{H}^\dagger \end{cases}.$$

Pour estimer \mathbf{H} , il faut ensuite résoudre ce système de matrices à diagonaliser conjointement. Voyons maintenant comment la technique par EVD peut être adaptée aux décompositions plus générales.

3.6.2 EVD-BCM(L,L,1)

Considérons la décomposition en termes blocs de rang-(L,L,1) d'un tenseur $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$: $\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R (\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{S}_r^T) \circ \mathbf{a}_r$, où les matrices $\mathbf{H}_r \in \mathbb{C}^{I \times L}$ et $\mathbf{S}_r \in \mathbb{C}^{J \times L}$ sont de rang L , $r \in [1 : R]$. Nous rappelons que les matrices résultant de la concaténation des \mathbf{H}_r , des \mathbf{S}_r et des \mathbf{a}_r sont respectivement notées $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times RL}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times RL}$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times R}$.

La technique que nous proposons requiert les hypothèses suivantes :

- (i) $RL \leq \min(I, J)$
- (ii) les matrices $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times RL}$ et $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times RL}$ sont de rang RL .
- (iii) \mathbf{A} ne contient pas de colonnes colinéaires.

Pour $k = 1 \dots K$, chaque tranche $[\mathcal{Y}]_{:, :, k}$ de taille $I \times J$ du tenseur \mathcal{Y} , notée \mathbf{Y}_k peut s'écrire

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{S}^T \\ \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{S}^T \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{Y}_K &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}_K \cdot \mathbf{S}^T \end{cases}, \quad (3.35)$$

où les matrices $\mathbf{D}_k \in \mathbb{C}^{RL \times RL}$ sont définies par $\mathbf{D}_k = \text{diag}([\mathbf{A}]_{k, :}) \otimes \mathbf{I}_L$.

Considérons les tranches \mathbf{Y}_{k_1} et \mathbf{Y}_{k_2} de \mathcal{Y} . La combinaison des équations k_1 et k_2 de (3.35) mène à :

$$\mathbf{Y}_{k_1}(\mathbf{Y}_{k_2})^\dagger = \mathbf{H}(\mathbf{D}_{k_1}\mathbf{D}_{k_2}^{-1})\mathbf{H}^\dagger, \quad (3.36)$$

où $\mathbf{D}_{k_1}\mathbf{D}_{k_2}^{-1} = \text{diag}([\mathbf{A}]_{k_1, :}) ./ ([\mathbf{A}]_{k_2, :}) \otimes \mathbf{I}_L$, et où $./$ désigne la division élément par élément de deux vecteurs. Supposons que le vecteur $([\mathbf{A}]_{k_1, :}) ./ ([\mathbf{A}]_{k_2, :})$ contient R valeurs distinctes. L'EVD de la matrice $\mathbf{Y}_{k_1}(\mathbf{Y}_{k_2})^\dagger \in \mathbb{C}^{I \times I}$ exhibe ainsi un ensemble de RL valeurs propres constitué de R sous-ensembles contenant chacun L valeurs propres identiques. Chaque matrice $\mathbf{H}_r \in \mathbb{C}^{I \times L}$, $r \in [1 : R]$, peut donc être estimée, à une multiplication près par une matrice non-singulière \mathbf{F}_r caractérisant l'indétermination du modèle, comme l'ensemble de L vecteurs propres de $\mathbf{Y}_{k_1}(\mathbf{Y}_{k_2})^\dagger$ associés à la même valeur propre. Une fois \mathbf{H} trouvée, on peut estimer \mathbf{S} par $\mathbf{S} = \mathbf{Y}_k^T \cdot (\mathbf{H}^T)^\dagger$, puis on peut estimer \mathbf{A} par $\mathbf{A} = (\mathbf{Y}_{JI \times K})^T \cdot ([\text{vec}(\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{S}_1^T) \dots \text{vec}(\mathbf{H}_R \cdot \mathbf{S}_R^T)]^T)^\dagger$.

3.6.3 EVD-BCM(L,P,..)

Considérons la décomposition en composantes blocs de rang-(L,P,..) : $\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R \mathcal{H}_r \bullet_2 \mathbf{S}_r \bullet_3 \mathbf{A}_r$, où les tenseurs \mathcal{H}_r sont de taille $(I \times L \times P)$ et les matrices $\mathbf{S}_r \in \mathbb{C}^{J \times L}$ et $\mathbf{A}_r \in \mathbb{C}^{K \times P}$ sont respectivement de rang L et P , $r \in [1 : R]$.

Pour $i = 1 \dots I$, chaque tranche $[\mathcal{Y}]_{i,:}$ de taille $K \times J$ du tenseur \mathcal{Y} , notée \mathbf{Y}_i peut s'écrire

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{S}^T \\ \mathbf{Y}_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{S}^T \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{Y}_I = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_I \cdot \mathbf{S}^T \end{cases}, \quad (3.37)$$

où pour un indice i donné, \mathbf{H}_i est une matrice bloc-diagonale de taille $RP \times RL$, construite en plaçant les R matrices $\mathbf{H}_{ri} = \mathcal{H}_r(i, :, :)$ sur la diagonale :

The diagram shows the matrix equation $\mathbf{Y}_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{S}^T$ with dimensions indicated. \mathbf{Y}_i is a $K \times J$ matrix. \mathbf{A} is a $K \times RP$ matrix composed of blocks $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_R$ of size $K \times P$. \mathbf{H}_i is a $RP \times RL$ block-diagonal matrix with blocks $\mathbf{H}_{1i}, \dots, \mathbf{H}_{Ri}$ of size $P \times L$. \mathbf{S}^T is a $J \times RL$ matrix composed of blocks $\mathbf{S}_1^T, \dots, \mathbf{S}_R^T$ of size $L \times L$.

La technique que nous proposons requiert les hypothèses suivantes :

(i) Nous supposons que $L = P$ et que $RL \leq \min(J, K)$, i.e. les matrices $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_R]$ et $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \dots \mathbf{S}_R]$ respectivement de taille $K \times RL$ et $J \times RL$ sont génériquement de rang RL .

(ii) Pour $i = 1 \dots I$ nous supposons que les matrices \mathbf{H}_i sont non singulières.

Deux étapes sont ensuite nécessaires. Dans un premier temps, nous utilisons la connaissance de la valeur des paramètres R et $L = P$ pour effectuer une réduction des dimensions du tenseur \mathcal{Y} . Cette technique utilise la SVD matricielle et nous y reviendrons plus en détail dans la section 5.5. Dans un second temps, nous montrons comment l'EVD permet d'estimer les matrices inconnues.

3.6.3.1 Réduction de dimensions

Si $RL < \min(J, K)$, et que les valeurs de R et $L = P$ sont connues, nous pouvons réduire $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ à $\bar{\bar{\mathcal{Y}}} \in \mathbb{C}^{I \times RL \times RL}$, où

$$\mathcal{Y} = \bar{\bar{\mathcal{Y}}} \bullet_2 \mathbf{W}_2 \bullet_3 \mathbf{W}_3,$$

et où les matrices \mathbf{W}_2 et \mathbf{W}_3 sont respectivement de taille $J \times RL$ et $K \times RL$. Le tenseur $\bar{\bar{\mathcal{Y}}}$ est une version compressée selon deux modes du tenseur \mathcal{Y} .

Pour trouver la matrice \mathbf{W}_2 , partons de la représentation matricielle suivante de \mathcal{Y} :

$$\mathbf{Y}_{IK \times J} = [(\mathcal{H}_1 \bullet_3 \mathbf{A}_1)_{IK \times L} \dots (\mathcal{H}_R \bullet_3 \mathbf{A}_R)_{IK \times L}] \cdot \mathbf{S}^T. \quad (3.38)$$

\mathbf{S} est de rang RL donc il existe une factorisation de \mathbf{S} telle que $\mathbf{S} = \mathbf{W}_2 \cdot \bar{\mathbf{S}}$, où $\bar{\mathbf{S}} \in \mathbb{C}^{RL \times RL}$ et $\mathbf{W}_2 \in \mathbb{C}^{J \times RL}$. La SVD de la matrice $\mathbf{Y}_{IK \times J}$, de rang RL , peut s'écrire $\mathbf{Y}_{IK \times J} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^H$, où $\mathbf{U} \cdot \mathbf{D}$ est de taille $IK \times RL$ et \mathbf{V}^H de taille $RL \times J$. Soit la matrice $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D}$ et $\bar{\mathcal{Y}} \in \mathbb{C}^{I \times RL \times K}$ sa représentation tensorielle. Si on choisit $\mathbf{W}_2 = \mathbf{V}^*$, alors la matrice $\bar{\mathbf{S}}$ vérifie

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{Y}} &= \left(\sum_{r=1}^R (\mathcal{H}_r \bullet_2 \bar{\mathbf{S}}_r \bullet_3 \mathbf{A}_r) \right) \bullet_2 \mathbf{W}_2 \\ &= \bar{\mathcal{Y}} \bullet_2 \mathbf{W}_2. \end{aligned}$$

De même, pour trouver \mathbf{W}_3 , partons de la représentation matricielle suivante de $\bar{\mathcal{Y}}$:

$$\bar{\mathbf{Y}}_{RLI \times K} = [(\mathcal{H}_1 \bullet_2 \bar{\mathbf{S}}_1)_{RLI \times L} \dots (\mathcal{H}_R \bullet_2 \bar{\mathbf{S}}_R)_{RLI \times L}] \cdot \mathbf{A}^T. \quad (3.39)$$

\mathbf{A} est de rang RL donc il existe une factorisation de \mathbf{A} telle que $\mathbf{A} = \mathbf{W}_3 \cdot \bar{\mathbf{A}}$, où $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{RL \times RL}$ et $\mathbf{W}_3 \in \mathbb{C}^{K \times RL}$. La SVD de la matrice $\bar{\mathbf{Y}}_{RLI \times K}$, de rang RL , peut s'écrire $\bar{\mathbf{Y}}_{RLI \times K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^H$, où $\mathbf{U} \cdot \mathbf{D}$ est de taille $RLI \times RL$ et \mathbf{V}^H de taille $RL \times K$. Soit la matrice $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D}$ et $\bar{\bar{\mathcal{Y}}} \in \mathbb{C}^{I \times RL \times RL}$ sa représentation tensorielle. Si on choisit $\mathbf{W}_3 = \mathbf{V}^*$, alors la matrice $\bar{\mathbf{A}}$ vérifie

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathcal{Y}}} &= \left(\sum_{r=1}^R (\mathcal{H}_r \bullet_2 \bar{\mathbf{S}}_r \bullet_3 \bar{\mathbf{A}}_r) \right) \bullet_3 \mathbf{W}_3 \\ &= \bar{\bar{\mathcal{Y}}} \bullet_3 \mathbf{W}_3. \end{aligned}$$

Ainsi, le tenseur des observations \mathcal{Y} peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \left(\sum_{r=1}^R (\mathcal{H}_r \bullet_2 \bar{\mathbf{S}}_r \bullet_3 \bar{\mathbf{A}}_r) \right) \bullet_2 \mathbf{W}_2 \bullet_3 \mathbf{W}_3 \\ &= \bar{\bar{\mathcal{Y}}} \bullet_2 \mathbf{W}_2 \bullet_3 \mathbf{W}_3. \end{aligned} \quad (3.40)$$

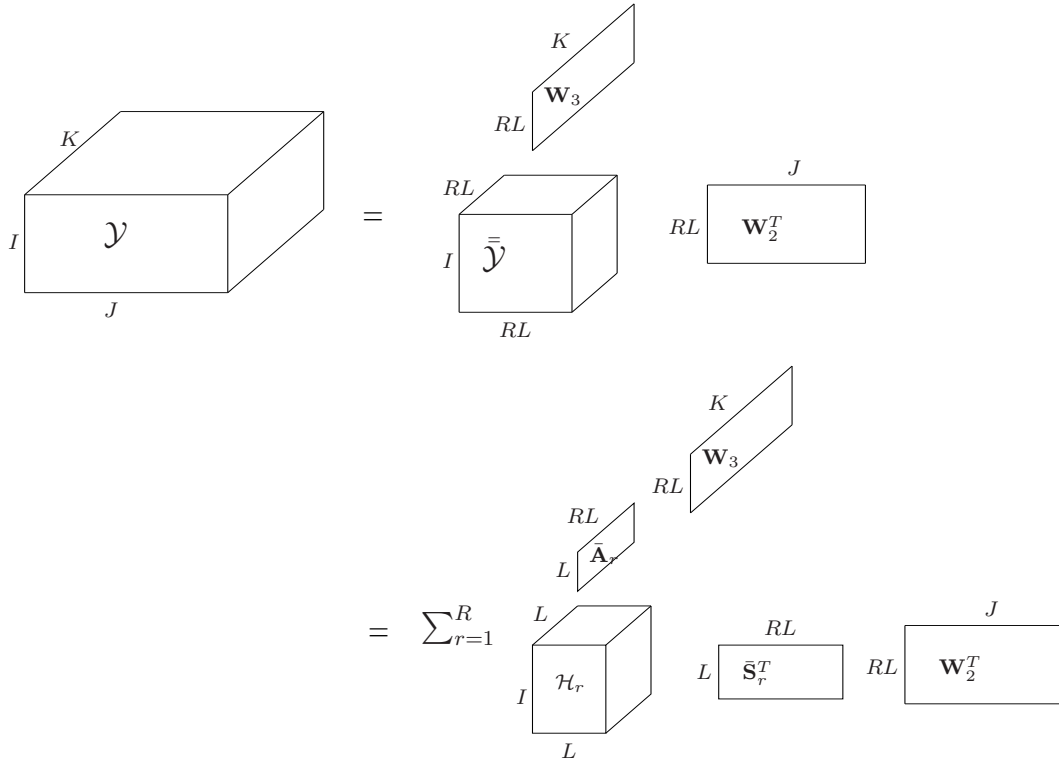
La figure 5.4 représente \mathcal{Y} schématiquement.

Remarque : *Les deux étapes de réduction des dimensions ne nécessitent pas $L = P$. Cette dernière contrainte a été imposée pour pouvoir effectuer une analyse basée sur l'EVD en exploitant la structure du tenseur $\bar{\bar{\mathcal{Y}}}$, ce qui constitue la seconde étape de la technique proposée, explicitée ci-après.*

Il s'agit maintenant de trouver les tenseurs $\mathcal{H}_r \in \mathbb{C}^{I \times L \times L}$, les matrices $\bar{\mathbf{S}}_r \in \mathbb{C}^{RL \times L}$ et $\bar{\mathbf{A}}_r \in \mathbb{C}^{RL \times L}$ à partir de la décomposition de $\bar{\bar{\mathcal{Y}}}$ en termes de rang- $(L, L, .)$.

3.6.3.2 Décomposition en valeurs propres

De même que pour l'équation (3.37), pour $i = 1 \dots I$, chaque tranche $\bar{\bar{\mathcal{Y}}}_i = \left[\bar{\bar{\mathcal{Y}}} \right]_{i, :, :}$ de taille $RL \times RL$ du tenseur $\bar{\bar{\mathcal{Y}}}$, peut s'écrire

FIG. 3.5 – Représentation de \mathcal{Y} après réduction des dimensions

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{Y}}_1 = \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \bar{\mathbf{S}}^T \\ \bar{\mathbf{Y}}_2 = \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{H}_2 \cdot \bar{\mathbf{S}}^T \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Y}}_I = \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{H}_I \cdot \bar{\mathbf{S}}^T \end{cases} \quad (3.41)$$

Nous cherchons d'abord une estimation de $\bar{\mathbf{A}}$. Les I équations de (3.41) peuvent être combinées ainsi :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{Y}}_1 (\bar{\mathbf{Y}}_2)^{-1} = \bar{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2^{-1}) \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1} \\ \bar{\mathbf{Y}}_1 (\bar{\mathbf{Y}}_3)^{-1} = \bar{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_3^{-1}) \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Y}}_1 (\bar{\mathbf{Y}}_I)^{-1} = \bar{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_I^{-1}) \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1} \end{cases} \quad (3.42)$$

Considérons 2 équations du système 3.42 :

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{12} = \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q}_{12} \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1} \\ \mathbf{Z}_{13} = \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q}_{13} \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1} \end{cases} \quad (3.43)$$

où $\mathbf{Z}_{12} = \bar{\mathbf{Y}}_1 (\bar{\mathbf{Y}}_2)^{-1}$ et $\mathbf{Z}_{13} = \bar{\mathbf{Y}}_1 (\bar{\mathbf{Y}}_3)^{-1}$ sont de taille $RL \times RL$ et $\mathbf{Q}_{12} = (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2^{-1})$ et $\mathbf{Q}_{13} = (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_3^{-1})$ sont des matrices bloc-diagonales non-singulières de taille $RL \times RL$, dont

les blocs sont de taille $L \times L$.

L' EVD de \mathbf{Q}_{12} et de \mathbf{Q}_{13} peut s'écrire

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{12} &= \mathbf{P}_{12} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{12} \cdot \mathbf{P}_{12}^{-1} \\ \mathbf{Q}_{13} &= \mathbf{P}_{13} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{13} \cdot \mathbf{P}_{13}^{-1} \end{cases}, \quad (3.44)$$

où $\mathbf{P}_{12} \in \mathbb{C}^{RL \times RL}$ contient les RL vecteurs propres de \mathbf{Q}_{12} et où $\boldsymbol{\Sigma}_{12} \in \mathbb{C}^{RL \times RL}$ est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de \mathbf{Q}_{12} . De même pour \mathbf{P}_{13} et $\boldsymbol{\Sigma}_{13}$.

Puisque \mathbf{Q}_{12} et \mathbf{Q}_{13} sont bloc-diagonales et que $\boldsymbol{\Sigma}_{12}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_{13}$ sont diagonales, alors \mathbf{P}_{12} et \mathbf{P}_{13} sont bloc-diagonales. Cette structure implique que chaque sous-ensemble de L valeurs propres associées de \mathbf{Q}_{12} (resp. \mathbf{Q}_{13}) peut être déterminé par l'EVD du bloc correspondant de taille $L \times L$ de \mathbf{Q}_{12} (resp. \mathbf{Q}_{13}). Par exemple, $[\mathbf{Q}_{12}]_{1:L,1:L} = [\mathbf{P}_{12}]_{1:L,1:L} \cdot [\boldsymbol{\Sigma}_{12}]_{1:L,1:L} \cdot [\mathbf{P}_{12}^{-1}]_{1:L,1:L}$.

Considérons maintenant l'EVD de \mathbf{Z}_{12} et \mathbf{Z}_{13} :

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{12} &= \mathbf{E}_{12} \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{E}_{12}^{-1} \\ \mathbf{Z}_{13} &= \mathbf{E}_{13} \cdot \mathbf{D}_{13} \cdot \mathbf{E}_{13}^{-1} \end{cases}, \quad (3.45)$$

où les matrices diagonales \mathbf{D}_{12} et \mathbf{D}_{13} contiennent respectivement les valeurs propres de \mathbf{Z}_{12} et \mathbf{Z}_{13} .

Par substitution de (3.44) et (3.45) dans (3.43), la matrice $\bar{\mathbf{A}}$ est solution de

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{12} \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{E}_{12}^{-1} &= \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}_{12} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{12} \cdot \mathbf{P}_{12}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1} \\ \mathbf{E}_{13} \cdot \mathbf{D}_{13} \cdot \mathbf{E}_{13}^{-1} &= \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}_{13} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{13} \cdot \mathbf{P}_{13}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1} \end{cases}. \quad (3.46)$$

D'après (3.43), \mathbf{Z}_{12} et \mathbf{Z}_{13} ont respectivement les mêmes valeurs propres que \mathbf{Q}_{12} et \mathbf{Q}_{13} . Ainsi, \mathbf{D}_{12} et \mathbf{D}_{13} sont liées à $\boldsymbol{\Sigma}_{12}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_{13}$ par

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{12} &= \boldsymbol{\Pi}_{12} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{12} \cdot \boldsymbol{\Pi}_{12}^{-1} \\ \mathbf{D}_{13} &= \boldsymbol{\Pi}_{13} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{13} \cdot \boldsymbol{\Pi}_{13}^{-1} \end{cases},$$

où $\boldsymbol{\Pi}_{12}$ et $\boldsymbol{\Pi}_{13}$ sont des matrices de permutation a priori inconnues. L'équation (3.46) s'écrit donc

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{12} \cdot \boldsymbol{\Pi}_{12} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{12} \cdot \boldsymbol{\Pi}_{12}^{-1} \cdot \mathbf{E}_{12}^{-1} &= \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}_{12} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{12} \cdot \mathbf{P}_{12}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1} \\ \mathbf{E}_{13} \cdot \boldsymbol{\Pi}_{13} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{13} \cdot \boldsymbol{\Pi}_{13}^{-1} \cdot \mathbf{E}_{13}^{-1} &= \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}_{13} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{13} \cdot \mathbf{P}_{13}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1} \end{cases}.$$

Ainsi $\bar{\mathbf{A}}$ est solution du système suivant

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{12} \cdot \boldsymbol{\Pi}_{12} &= \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{E}_{13} \cdot \boldsymbol{\Pi}_{13} &= \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}_{13} \end{cases}. \quad (3.47)$$

Chaque sous-matrice $\bar{\mathbf{A}}_r \in \mathbb{C}^{RL \times L}$ de $\bar{\mathbf{A}}$ résulte donc de combinaisons linéaires d'un ensemble de L vecteurs de \mathbf{E}_{12} . La matrice $\boldsymbol{\Pi}_{12}$ permet d'associer ces vecteurs L par L et la matrice bloc-diagonale \mathbf{P}_{12}^{-1} contient les coefficients des combinaisons linéaires. Rappelons cependant qu'étant donné les indéterminations propres au modèle, la matrice $\bar{\mathbf{A}}$ n'est déterminée qu'à une matrice bloc-diagonale près, i.e. les degrés de liberté du modèle permettent de multiplier chaque matrice $\bar{\mathbf{A}}_r$ par une matrice non-singulière \mathbf{F}_r , pourvu que \mathbf{F}_r^{-1} soit incorporée dans

\mathcal{H}_r . Il n'est donc pas nécessaire de trouver \mathbf{P}_{12} et \mathbf{P}_{13} pour estimer $\bar{\mathbf{A}}$ à cette indétermination près. Une estimation de cette matrice peut donc s'écrire $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{E}_{12} \cdot \mathbf{\Pi}_{12}$, ou $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{E}_{13} \cdot \mathbf{\Pi}_{13}$. Le problème se résume donc à trouver les matrices de permutation $\mathbf{\Pi}_{12}$ et/ou $\mathbf{\Pi}_{13}$ permettant d'ordonner les colonnes de \mathbf{E}_{12} et/ou \mathbf{E}_{13} .

En combinant les 2 équations de (3.47), on obtient

$$\mathbf{E}_{12}^{-1} \cdot \mathbf{E}_{13} = \mathbf{\Pi}_{12} \cdot (\mathbf{P}_{12}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{13}) \cdot \mathbf{\Pi}_{13}^{-1}.$$

Puisque la matrice $(\mathbf{P}_{12}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{13})$ est bloc-diagonale, la position des éléments non nuls de $\mathbf{E}_{12}^{-1} \cdot \mathbf{E}_{13}$ exhibe directement la position des "1" dans les deux matrices de permutation, ce qui permet de trouver $\bar{\mathbf{A}}$. D'après 3.41, $\bar{\mathbf{S}}$ peut être trouvée par $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{Y}}_i^T \cdot (\bar{\mathbf{A}}^T)^\dagger$. On trouve alors $\mathbf{A} = \mathbf{W}_3 \cdot \bar{\mathbf{A}}$

et $\mathbf{S} = \mathbf{W}_2 \cdot \bar{\mathbf{S}}$. Enfin, les tenseurs \mathcal{H}_r , $r = 1 \dots R$, peuvent être estimés par
$$\begin{pmatrix} (\mathcal{H}_1)_{PL \times I} \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_R)_{PL \times I} \end{pmatrix} = (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{S})^\dagger \cdot \mathbf{Y}_{KJ \times I}.$$

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit de nouvelles décompositions tensorielles. Ces nouveaux outils mathématiques généralisent la décomposition PARAFAC et en ce sens, elles offrent une meilleure capacité de modélisation pour des données tridimensionnelles. Elles permettent en effet d'extraire du tenseur des observations des contributions blocs qui sont plus complexes que de simples contributions de rang 1.

Un aspect fondamental lors du calcul d'une décomposition tensorielle est l'unicité de cette décomposition, afin de garantir l'identifiabilité de chaque contribution présente dans le mélange. Pour le modèle PARAFAC, des résultats récents ont montré que la borne suffisante de Kruskal peut être dépassée. Dans ce chapitre, nous avons donné (Théorème 3.4) une nouvelle borne d'unicité pour le modèle BCM-(L,L,1). Ce résultat a été établi en reformulant la décomposition en termes de rang-(L,L,1) en un système de matrices à diagonaliser simultanément, comme nous le montrerons dans le chapitre 6.

Lorsque certaines contraintes sur les dimensions sont respectées, les nouvelles décompositions introduites peuvent être calculées de manière non itérative par simple EVD matricielle. Les contraintes sur les dimensions des inconnues pour pouvoir utiliser l'EVD sont synthétisées dans le tableau 3.1. Lorsque la décomposition n'est pas exacte, comme c'est le cas si le tenseur des observations est bruité, la technique par EVD permet de trouver une initialisation efficace pour les algorithmes d'optimisation tels que ceux proposés dans le chapitre 5.

Après avoir introduit les nouvelles décompositions tensorielles sous un angle mathématique, nous montrons dans le chapitre suivant comment ces nouveaux outils permettent de résoudre le problème d'égalisation et de séparation aveugles de signaux CDMA lorsque le canal est sélectif en fréquences.

Modèle	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Contrainte pour EVD
PARAFAC	$\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times R}$	$\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times R}$	$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times R}$	$R \leq \min(I, J)$
BCM-(L,L,1)	$\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times RL}$	$\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times RL}$	$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times R}$	$RL \leq \min(I, J)$
BCM-(L,P,.)	$\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times RLP}$	$\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times RL}$	$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times RP}$	$L = P$ et $RL \leq \min(J, K)$

TAB. 3.1 – Contraintes pour utiliser la technique de calcul par EVD

Chapitre 4

Applications aux Systèmes CDMA

4.1 Introduction

Lors de la conception d'un système de radiocommunications mobiles, un problème fondamental est le partage de ressources limitées entre plusieurs utilisateurs communiquant simultanément au sein de ce réseau. La technique d'accès multiple par multiplexage fréquentiel (FDMA) fut associée aux systèmes de première génération. Ainsi, le système analogique Radiocom 2000 qui s'est développé en France à partir de 1986 était basé sur le FDMA. La deuxième génération de systèmes cellulaires utilise un multiplexage temporel et fréquentiel (F/TDMA), comme la norme GSM déployée à partir de 1991, ou déjà un multiplexage par code (CDMA) comme la norme IS-95 déployée aux Etats-Unis à partir de 1993. Le besoin de proposer aux utilisateurs des débits plus importants conduit les constructeurs et équipementiers à s'associer au sein du groupe 3GPP (Third Generation Partnership Project) pour élaborer la troisième génération de système cellulaire. C'est de ce groupe de normalisation que naît l'UMTS (Universal Mobile Telecommunication System [1]), destiné à remplacer le GSM et ses évolutions GPRS et EDGE en Europe. D'autres standards ou normes 3G apparaissent, comme le CDMA 2000 (combinaison d'une technologie OFDM et d'un accès par codes), ou le FOMA japonais, première norme 3G déployée. Tous ces systèmes utilisent aujourd'hui une technologie CDMA, ou WCDMA.

L'étalement de spectre par séquence directe ou DS-SS, a tout d'abord été utilisée dans des applications militaires : radios tactiques américaines, puis implémentation pour le système global de positionnement GPS. Cette technologie a ensuite été déployée dans des systèmes civils de radiocommunications mobiles, tout d'abord 2G (IS-95 / CDMA-One), puis 3G (UMTS). L'avantage des techniques CDMA est de présenter une grande résistance au brouillage bande étroite, et une certaine robustesse aux interférences inter-utilisateurs. Elles présentent de plus un intérêt en terme de discrétion en raison des largeurs de bande employées.

Dans le cas d'une liaison coopérative, l'émetteur envoie des séquences d'apprentissage connues par le récepteur pour permettre à celui-ci d'estimer les effets du canal de propagation. Cependant, ces séquences doivent être transmises d'autant plus fréquemment que le canal varie rapidement au cours du temps, à cause par exemple du mouvement des utilisateurs. Ainsi, environ 25 % du débit total disponible est consacré à l'apprentissage en GSM et jusqu'à 50 % en UMTS. Le développement de méthodes qui permettraient de supprimer les séquences d'ap-

prentissage (méthodes “purement” aveugles) ou de réduire leur taille (méthodes “semi-aveugles”) pourrait donc contribuer à une augmentation significative du débit utile. De plus, si le canal induit des évanouissements sévères, les séquences d’apprentissage en subissent elles-mêmes les effets, ce qui limite l’efficacité de la liaison coopérative.

Dans les systèmes civils coopératifs actuels, la connaissance du code CDMA est exploitée à la réception afin d’extraire le signal d’un utilisateur particulier en annulant l’interférence des autres utilisateurs. Cependant, dans le cas d’une écoute discrète, le signal intercepté résulte d’une somme de tous les signaux transmis simultanément dans la même bande de base mais ni les codes CDMA ni les séquences d’apprentissage ne sont connus.

Dans cette thèse, nous nous situons dans un contexte doublement aveugle : **nous supposons que le récepteur n’a pas connaissance des codes d’étalement et ne possède pas d’information sur le canal.** Les récepteurs aveugles que nous proposons dans ce chapitre sont déterministes et ont pour tâche essentielle d’effectuer la **séparation** des signaux ainsi que leur **égalisation**, et ce uniquement à partir du signal observé.

Classiquement, les techniques aveugles en télécommunications (non nécessairement dans les systèmes CDMA) reposent sur certaines propriétés connues a priori, comme les propriétés temporelles des signaux transmis ou les propriétés spatiales du récepteur.

Par exemple, certaines techniques forcent les signaux estimés à avoir les mêmes propriétés déterministes que les signaux transmis, comme l’alphabet fini ou le module constant [24, 25]. D’autres algorithmes utilisent la connaissance du débit symbol constant pour effectuer un sur-échantillonnage temporel et créer ainsi des canaux “virtuels” [8, 80].

Dans un contexte MIMO, les méthodes aveugles spatiales estiment les signaux reçus par un réseau d’antennes généralement grâce à des algorithmes tels que MUSIC [81] ou ESPRIT [82] qui permettent de trouver les directions d’arrivée. La performance de ces derniers algorithmes dépend fortement de connaissances spatiales à priori comme la calibration du réseau d’antennes ou sa géométrie. L’utilisation de multiples antennes permet notamment d’exploiter les directions d’arrivée des trajets multiples suivis par les signaux transmis. Bien que ces trajets multiples soient a priori néfastes car ils imposent une étape d’égalisation pour supprimer l’IES engendrée, ils peuvent également être considérés comme une diversité exploitable, en particulier lorsqu’il n’existe pas de ligne de vue directe entre l’émetteur et le récepteur. Les diversités temporelles et spatiales peuvent également être combinées pour construire des égaliseurs spatio-temporels [7, 83].

Quelles que soient les propriétés utilisées, les problèmes aveugles sont classiquement formulés en termes d’algèbre matricielle et consistent à résoudre un problème de décomposition matricielle de la forme $\mathbf{Y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}$, comme nous l’avons mentionné dans l’introduction. Etant donnée l’unique connaissance de la matrice des observations \mathbf{Y} , l’objectif est d’identifier la matrice de mélange \mathbf{H} (caractérisant par exemple le canal de propagation) et la matrice des sources \mathbf{S} (contenant par exemple les symboles numériques transmis) par une approche statistique ou déterministe.

Récemment, les méthodes algébriques tensorielles ont reçues beaucoup d’attention en traitement du signal [29, 37, 52, 54, 57, 84–86]. Lorsqu’un signal est intrinsèquement multi-dimensionnel sa modélisation sous forme matricielle est certes possible mais elle est moins révélatrice des propriétés de ce signal qu’une modélisation tensorielle. Il s’avère d’ailleurs que les outils d’algèbre

multilinéaire sont souvent bien plus puissants que leurs équivalents matriciels.

Sidiropoulos, Giannakis et Bro furent les premiers à adopter ce point de vue dans le domaine des télécommunications en 2000 [29]. Ils ont d'abord remarqué que les échantillons d'un signal CDMA reçu par un réseau d'antennes peuvent être stockés dans un cube dont chaque dimension correspond à une diversité disponible. La première a pour longueur le facteur d'étalement (diversité de codage), la seconde a pour longueur la durée d'observation (diversité temporelle) et la troisième a pour longueur le nombre d'antennes (diversité spatiale). Partant de constat, ils ont montré que le problème de séparation aveugle déterministe des signaux CDMA peut être résolu par la décomposition PARAFAC du tenseur des observations. Cette approche n'est toutefois valable que pour un canal sans-mémoire, c'est à dire sans trajets multiples ni IES.

Dans ce chapitre, nous proposons de généraliser les travaux fondateurs de [29] en considérant des scénarii de propagation plus réalistes, et nous montrons que les expressions analytiques des signaux reçus peuvent s'exprimer algébriquement à l'aide des nouvelles décompositions tensorielles du chapitre 3. Pour tous les modèles considérés, notre approche est purement déterministe et se base sur l'exploitation de la structure algébrique des données reçues. Par opposition aux méthodes purement statistiques, notre technique ne nécessite pas l'observation de trames longues, ce qui assouplit la contrainte de stationnarité temporelle du canal. De plus, l'indépendance statistique des sources n'est pas requise. Le conditionnement des données à estimer a toutefois un impact sur les performances, comme nous l'illustrerons dans le chapitre 5.

Dans la section 4.2, nous rappelons le modèle de transmission de signaux CDMA.

Dans la section 4.3, nous considérons un canal sans-mémoire, et nous rappelons le résultat fondamental de [29], qui établit un lien entre le signal reçu et le modèle PARAFAC.

Dans la section 4.4, nous montrons que dans le cas de la propagation par trajets multiples avec réflexions uniquement dans le champ lointain des antennes, le modèle analytique correspondant peut s'écrire comme la décomposition en termes de rang-(L,L,1) du tenseur des observations.

Enfin, dans la section 4.5, nous montrons que dans le cas de la propagation par trajets multiples et réflexions non uniquement dans le champ lointain des antennes réceptrices, la solution peut être obtenue par la décomposition en termes de rang-(L,P,..) du tenseur des observations.

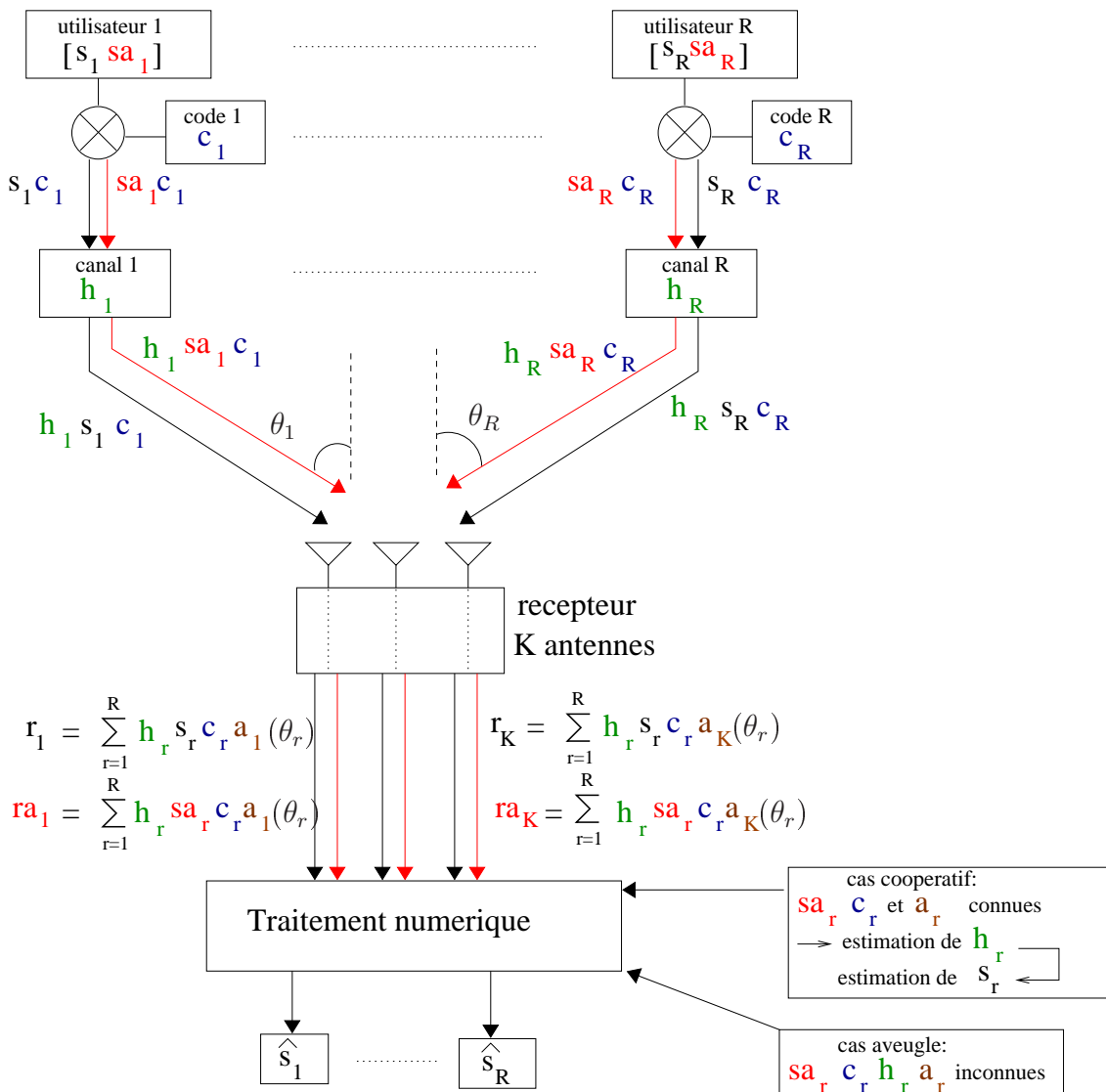
4.2 Transmission de signaux CDMA

4.2.1 Système coopératif vs. système aveugle

Le modèle de transmission représenté par la figure 4.1 est applicable dans la liaison montante (du mobile vers la station de base). Nous considérons R utilisateurs équipés d'une antenne émettrice, transmettant simultanément leurs signaux, non nécessairement synchrones, vers un réseau de K antennes réceptrices.

Dans notre étude, les utilisateurs ne disposent que d'une seule antenne émettrice si bien que, par abus de langage, l'aspect "Multiple-Input" du système global que nous qualifions de "MIMO" provient du contexte multi-utilisateurs. En d'autres termes, nous considérons dans notre étude un système de communication de type "SIMO multi-utilisateurs".

Supposons par exemple que l'utilisateur r doit transmettre le symbole s_r . Dans les systèmes coopératifs, les utilisateurs transmettent périodiquement une séquence d'apprentissage, en plus



s_r : symbole de l'utilisateur r
 sa_r : symbole d'apprentissage de l'utilisateur r
 c_r : code de l'utilisateur r, contient I chips
 h_r : coefficient multiplicateur du canal de l'utilisateur r
 (canal plat dans cet exemple: un seul trajet par utilisateur)
 $a_k(\theta_r)$: reponse de l'antenne k pour l'angle d'arrivee thetar

FIG. 4.1 – Modèle de transmission en bande de base des signaux CDMA

de leur information utile. Supposons que l'utilisateur r transmet également le symbole d'apprentissage sa_r . Les symboles s_r et sa_r sont étalés par le code CDMA \mathbf{c}_r de longueur I , alloué de manière unique à l'utilisateur r . Pour exposer simplement le principe du modèle de transmission, nous supposons dans la figure 4.1 que les séquences $s_r\mathbf{c}_r$ et $sa_r\mathbf{c}_r$ sont transmises dans un canal sans mémoire : ces séquences sont multipliées par un scalaire complexe h_r caractérisant l'atténuation associée au trajet unique considéré entre l'utilisateur r et le réseau d'antennes. Supposons maintenant que les séquences $h_rs_r\mathbf{c}_r$ et $h_rsa_r\mathbf{c}_r$ sont reçues par le réseau d'antennes selon un angle d'incidence θ_r . Chaque antenne reçoit une contribution de chacun des R utilisateurs. Les deux séquences reçues par la k ème antenne sont $\mathbf{r}_k = \sum_{r=1}^R h_rs_r\mathbf{c}_ra_k(\theta_r)$ et $\mathbf{ra}_k = \sum_{r=1}^R h_rsa_r\mathbf{c}_ra_k(\theta_r)$, où le scalaire complexe $a_k(\theta_r)$ est la réponse de l'antenne k à l'angle d'arrivée θ_r .

Ensuite, le traitement numérique effectué sur les séquences \mathbf{r}_k et \mathbf{ra}_k a pour fonction d'estimer les symboles transmis s_r , $r \in [1 : R]$. Ce traitement peut être effectué par une approche coopérative ou une approche aveugle.

Dans les systèmes coopératifs, tels que la plupart des systèmes civils actuels, la connaissance à la réception des symboles d'apprentissage sa_r , des codes CDMA \mathbf{c}_r , ainsi que de la géométrie du réseau d'antennes et de sa calibration permet d'estimer dans un premier temps les coefficients h_r de la réponse impulsionnelle des R canaux à partir des séquences \mathbf{ra}_k . Une fois ces coefficients connus, ils sont utilisés pour extraire les symboles transmis des séquences observées \mathbf{r}_k .

Au contraire, l'approche **aveugle** que nous considérons dans ce manuscrit consiste à trouver les s_r , $r \in [1 : R]$, uniquement à partir des observations reçues \mathbf{r}_k . Le problème à résoudre pourrait a priori être scindé en deux parties. D'une part, il faut effectuer la **séparation** des R contributions contenues dans les signaux reçus par chaque antenne, sans connaissance des codes CDMA. D'autre part, une étape d'**égalisation** est également nécessaire de manière à supprimer l'IES éventuellement engendrée par un canal à trajets multiples sélectif en fréquence, ceci sans connaissance de la séquence d'apprentissage.

Pour résoudre le problème de séparation et d'égalisation aveugles des signaux CDMA reçus, nous proposons une approche algébrique multilinéaire qui permet d'effectuer ces deux opérations conjointement.

4.2.2 Modélisation tensorielle

Notre approche pour effectuer la séparation et l'égalisation aveugles conjointes des signaux reçus par le réseau d'antennes consiste à exploiter la structure algébrique multilinéaire de ces signaux. La figure 4.2 synthétise le concept fondamental de notre approche. Chacune des K antennes reçoit un signal $y_k(t)$. Nous observons ces signaux durant un laps de temps de durée JT_s , où T_s est la période symbole, durant lequel le canal est supposé stationnaire. Les signaux $y_k(t)$ sont échantillonnés à la période chip $T_c = T_s/I$, où I est le facteur d'étalement. Chaque antenne fournit donc un ensemble de IJ échantillons que l'on peut ordonner dans les matrices \mathbf{Y}_k . La concaténation de ces K matrices selon la troisième dimension (qu'on appelle aussi mode 3) permet donc de construire le tenseur des observations d'ordre 3, noté $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$.

L'élément y_{ijk} de ce tenseur correspond à l'échantillon du signal global reçu par la k ème antenne au i ème instant d'échantillonnage de la j ème période symbole, $i \in [1 : I]$, $j \in [1 : J]$,

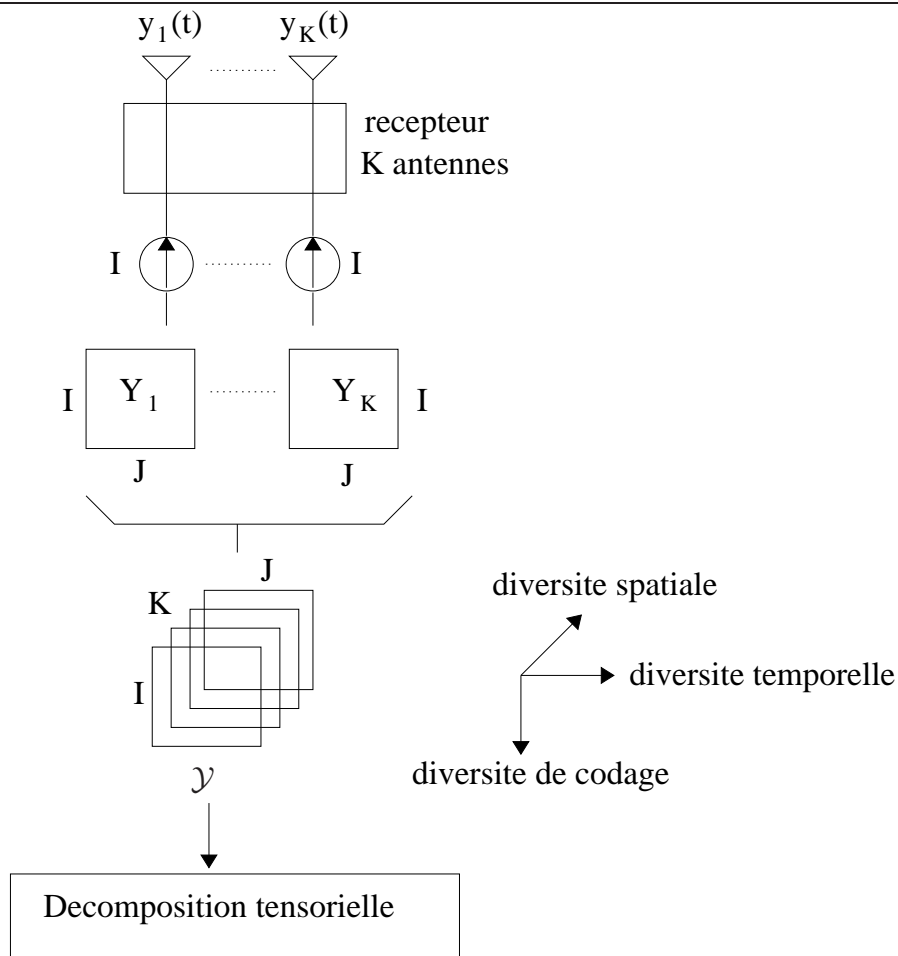


FIG. 4.2 – Construction du tenseur des observations

$k \in [1 : K]$. Chaque dimension du tenseur des observations correspond donc à une diversité disponible à la réception : la première dimension correspond à la diversité de codage, la seconde à la diversité temporelle et la troisième à la diversité spatiale.

Notons que les modèles algébriques développés dans ce manuscrit s'appliquent aussi à un système où les symboles ne sont pas préalablement étalés par un code CDMA. La diversité de codage peut par exemple être remplacée par une dimension de sur-échantillonnage temporel [7, 8], à condition de sur-échantillonner les signaux $y_k(t)$ d'un facteur I .

La solution que nous proposons pour résoudre le problème de séparation et d'égalisation aveugles consiste à décomposer le tenseur des observations en une somme de R contributions, où R représente le nombre d'utilisateurs actifs dans le système. Cependant, l'expression algébrique de ces contributions diffère selon le modèle de propagation considéré. Dans la suite de ce chapitre, nous allons donc considérer plusieurs scénarii de propagation puis montrer que chacun d'eux correspond à l'une des décompositions tensorielles exposées dans le chapitre 3.

4.2.3 Expression analytique du signal transmis

Considérons un système CDMA où R utilisateurs communiquent simultanément dans la même bande passante. Chaque utilisateur se voit attribué de manière unique un code d'étalement de longueur I . Nous notons $\mathbf{c}_r = [c_{1r} c_{2r} \dots c_{Ir}]$ la séquence qui contient les I chips du code d'étalement de l'utilisateur r . Ces codes ne sont pas nécessairement orthogonaux et sont supposés inconnus à la réception.

La forme d'onde d'étalement $e_r(t)$ de l'utilisateur r est construite en modulant la séquence d'étalement par un filtre de mise en forme $g(t)$:

$$e_r(t) = \sum_{i=1}^I g(t - iT_c) c_{ir},$$

Le filtre de mise en forme est de type cosinus surélevé défini au rythme chip.

Supposons que chaque utilisateur transmet une séquence de J symboles consécutifs, $\mathbf{s}_r = [s_{1r} s_{2r} \dots s_{Jr}]$. Le signal en bande de base $x_r(t)$ transmis par l'utilisateur r est

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \sum_{j=1}^J s_{jr} e_r(t - jT_s) \\ &= \sum_{j=1}^J s_{jr} \sum_{i=1}^I g(t - iT_c - jT_s) c_{ir}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Nous supposons que chaque utilisateur dispose d'une seule antenne émettrice et que son signal est transmis vers un récepteur composé d'un réseau de K antennes dont la géométrie est inconnue.

4.3 Canal sans-mémoire

4.3.1 Modèle analytique

Supposons que les signaux $x_r(t)$, $r = 1 \dots R$ se propagent selon un unique trajet avant d'atteindre le récepteur. Le canal est donc sans mémoire et le mélange reçu est considéré comme linéaire et instantané. Le signal en bande de base $y_k(t)$ reçu par la k ème antenne s'écrit

$$y_k(t) = \sum_{r=1}^R \beta_r a_k(\theta_r) x_r(t),$$

où le scalaire $a_k(\theta_r) \in \mathbb{C}$ est la réponse de l'antenne k selon l'angle d'incidence θ_r du trajet provenant de l'utilisateur r , et β_r est le coefficient d'évanouissement dû à la propagation du signal $x_r(t)$ dans le canal.

Le signal $y_k(t)$ est échantillonné au rythme chip à la réception.

L'échantillon y_{ijk} de $y_k(t)$ reçu par l'antenne k à l'instant d'échantillonnage $(jI + i)T_c$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} y_{ijk} &= \sum_{r=1}^R \beta_r a_k(\theta_r) s_{jr} c_{ir} \\ &= \sum_{r=1}^R a_{kr} s_{jr} c_{ir}, \quad i \in [1, I], j \in [1, J], k \in [1, K], \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $a_{kr} = \beta_r a_k(\theta_r)$. Le modèle analytique (4.2) reste valable dans le cas où il y a de l'interférence entre chips mais pas d'interférence entre symboles (IES) [29]. Il suffit alors de remplacer c_{ir} par h_{ir} , où h_{ir} désigne le produit de convolution entre la séquence d'étalement du r ème utilisateur et la réponse impulsionnelle du canal correspondant.

4.3.2 Modèle tensoriel équivalent : PARAFAC

Le premier récepteur algébrique multilinéaire pour les communications sans fil fut introduit par Sidiropoulos et al. en 2000 [29]. Les auteurs ont montré que pour un canal de propagation sans mémoire, le modèle algébrique strictement équivalent à (4.2) correspond à la décomposition PARAFAC du tenseur des observations $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$, dans lequel on a stocké les échantillons y_{ijk} . Ainsi, dans le cas d'un canal linéaire instantané, la contribution de chaque utilisateur peut être modélisée par un tenseur de rang-1.

La décomposition PARAFAC de \mathcal{Y} consiste à estimer les matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times R}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times R}$ et $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{I \times R}$ (ou $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times R}$) contenant respectivement la réponse des antennes, les symboles d'information et les codes d'étalement (ou les codes convolués par la R.I. du canal). On a ainsi : $[\mathbf{A}]_{k,r} = a_{kr}$, $[\mathbf{S}]_{j,r} = s_{jr}$ et $[\mathbf{C}]_{i,r} = c_{ir}$.

Dans le chapitre 3, les conditions d'unicité de la décomposition PARAFAC données par les équations (3.10) et (3.11) s'interprètent comme des bornes autorisant un nombre maximum d'utilisateurs admissibles simultanément dans le système. Notons que la borne (3.11) est considérablement moins contraignante que la borne (3.10) car elle autorise un nombre d'utilisateurs substantiellement plus élevé [48].

L'article fondateur [29] a ouvert de nombreuses perspectives de recherche quant à l'apport de l'algèbre multilinéaire en traitement du signal pour les télécommunications. Les auteurs ont ainsi montré que la décomposition PARAFAC peut être utilisée pour construire un récepteur algébrique aveugle dans le cas d'un canal n'engendrant pas d'IES.

Cependant, les transmissions radioélectriques sont souvent effectuées sur des canaux à trajets multiples, qui sont dus essentiellement aux réflexions sur les obstacles physiques présents dans l'environnement de propagation. Dans ce cas, le récepteur aveugle doit effectuer une double tâche :

- i) d'une part, comme pour le modèle PARAFAC, le récepteur doit séparer les différentes contributions présentes dans le mélange global reçu, sans connaissance préalable des codes CDMA. Il s'agit donc de résoudre le problème d'interférences entre utilisateurs.
- ii) d'autre part, les trajets multiples engendrent à la réception une superposition de plusieurs versions atténuées et retardées du signal transmis par chaque utilisateur. Si l'étalement des

délais est important, cette superposition provoque de l'IES. Pour combattre l'IES, le récepteur a donc également une fonction d'égaliseur aveugle, i.e. sans connaissance préalable des séquences d'apprentissage.

Dans les sections suivantes, nous montrons que ce scénario de propagation plus complexe peut être traité à l'aide des nouvelles décompositions tensorielles introduites dans le chapitre 3.

4.4 Canal multi-trajets avec réflexions dans le champ lointain

4.4.1 Modèle analytique

Supposons maintenant que les signaux $x_r(t)$, $r = 1 \dots R$ se propagent selon plusieurs trajets avant d'atteindre le récepteur mais que les réflecteurs sont situés uniquement dans le champ lointain du réseau d'antennes réceptrices, c'est à dire uniquement dans l'environnement proche des utilisateurs.

Cette hypothèse signifie que l'on ne fait pas la distinction entre les angles d'arrivée des trajets issus d'un même utilisateur [7, 37, 38, 85]. En d'autres termes, l'étalement des angles d'arrivée est négligeable car les antennes ne "voient" qu'un seul trajet provenant de chaque utilisateur, auquel est associé un angle d'incidence θ_r . Cependant, l'étalement des retards associés aux différents trajets dans le champ lointain n'est pas nécessairement négligeable si bien que le signal reçu par les antennes peut contenir de l'IES.

Pour l'utilisateur r , nous notons $h_r(t)$ la R.I. du canal global équivalent, résultant de la convolution de la R.I. du canal effectif par la forme d'onde d'étalement $e_r(t)$. Soit $L_r T_s$ la durée de $h_r(t)$, signifiant que l'IES a lieu sur L_r symboles consécutifs. Le canal global est supposé stationnaire sur la durée d'observation $J T_s$.

L'échantillon y_{ijk} du signal reçu par la k ème antenne à l'instant d'échantillonnage $(jI + i)T_c$ s'écrit donc

$$y_{ijk} = \sum_{r=1}^R a_k(\theta_r) \sum_{l=1}^{L_r} h_r(i + (l-1)I) s_{j-l+1,r}, \quad (4.3)$$

où $a_k(\theta_r)$ est le coefficient de réponse de l'antenne k selon l'angle d'incidence θ_r associé à l'utilisateur r . $h_r(i + (l-1)I)$ est l'échantillon de $h_r(t)$ à l'instant $(i + (l-1)I)T_c$.

4.4.2 Modèle tensoriel équivalent : BCM- $(L, L, 1)$

Nous collectons tous les échantillons y_{ijk} , $i \in [1 : I]$, $j \in [1 : J]$, $k \in [1 : K]$, dans le tenseur des observations $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$. Soit la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times R}$ caractérisant la réponse des antennes, telle que $[\mathbf{A}]_{k,r} = a_k(\theta_r)$, dont les colonnes sont les vecteurs \mathbf{a}_r . Soient les matrices $\mathbf{H}_r \in \mathbb{C}^{I \times L_r}$, $r \in [1 : R]$, contenant les IL_r échantillons de la R.I. des canaux associés aux R utilisateurs et la matrice $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 | \dots | \mathbf{H}_R] \in \mathbb{C}^{I \times \bar{L}}$, où $\bar{L} = \sum_{r=1}^R L_r$. Soient enfin les matrices $\mathbf{S}_r \in \mathbb{C}^{J \times L_r}$, $r \in [1 : R]$, telles que $[\mathbf{S}_r]_{j,l} = s_{j-l+1,r}$. Ces matrices ont une **structure Toeplitz** due à l'IES engendrée.

La décomposition tensorielle strictement équivalente au modèle analytique de l'équation (4.3), représentée sur la figure 4.3, est une décomposition en termes de rang- $(L_r, L_r, 1)$ de \mathcal{Y} . Cette décomposition diffère de la décomposition en termes de rang- $(L, L, 1)$ introduite dans le chapitre 3 sur les deux aspects suivants : d'une part les matrices \mathbf{S}_r ont une structure Toeplitz et d'autre part la longueur du canal L_r peut être différente selon l'utilisateur considéré. La contribution d'un utilisateur donné est ainsi construite à partir d'un vecteur \mathbf{a}_r et de deux matrices \mathbf{H}_r et \mathbf{S}_r de rang L_r .

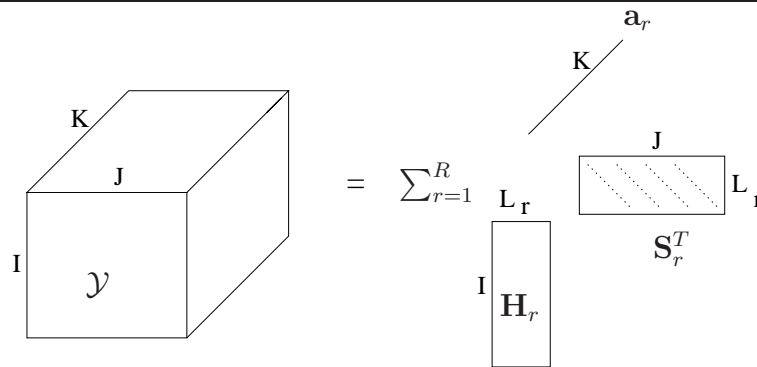


FIG. 4.3 – Décomposition en termes de rang- $(L_r, L_r, 1)$ avec structure Toeplitz sur \mathbf{S}_r

Dans la même démarche de généralisation, il est désormais légitime de se demander comment le scénario de propagation avec réflexions non uniquement dans le champ lointain peut être traité au moyen d'outils algébriques multilinéaires.

4.5 Canal multi-trajets avec réflexions non uniquement dans le champ lointain

4.5.1 Modèle analytique

Supposons maintenant que les signaux $x_r(t)$, $r = 1 \dots R$, se propagent selon plusieurs trajets avant d'atteindre le récepteur et que les réflecteurs ne sont pas uniquement situés dans le champ lointain.

Nous adoptons le modèle paramétrique suivant : le signal $x_r(t)$ transmis par le r ème utilisateur est reçu par les antennes selon P_r trajets distincts, où chaque trajet est caractérisé par le triplet $(\beta_{p,r}, \theta_{p,r}, \tau_{p,r})$, représentant respectivement l'évanouissement, l'angle d'arrivée et le retard du p ème trajet issu du r ème utilisateur.

La principale différence avec le modèle de la section précédente réside dans la distinction des différents angles d'arrivée du point de vue du récepteur.

La réponse du canal global entre le r ème utilisateur et la k ème antenne réceptrice peut donc

s'écrire

$$h_{k,r}(t) = \sum_{p=1}^{P_r} \beta_{p,r} a_k(\theta_{p,r}) e_r(t - \tau_{p,r}).$$

Supposons que l'étalement des retards pour le r ème utilisateur engendre de l'IES sur L_r symboles consécutifs, c'est à dire $h_{k,r}(t)$ est de durée $L_r T_s$, $\forall k \in [1 : K]$.

Après échantillonnage du signal reçu par chaque antenne au rythme chip, l'échantillon y_{ijk} du signal reçu par la k ème antenne à l'instant $(jI + i)T_c$ s'écrit

$$y_{ijk} = \sum_{r=1}^R \sum_{p=1}^{P_r} \beta_{p,r} a_k(\theta_{p,r}) \sum_{l=1}^{L_r} e_{p,r}(i + (l-1)I) s_{j-l+1,r}, \quad (4.4)$$

où $e_{p,r}(i + (l-1)I)$ est l'échantillon de $e_r(t - \tau_{p,r})$ à l'instant $t = (i + (l-1)I)T_c$.

4.5.2 Modèle tensoriel équivalent : BCM-(L, P, \cdot)

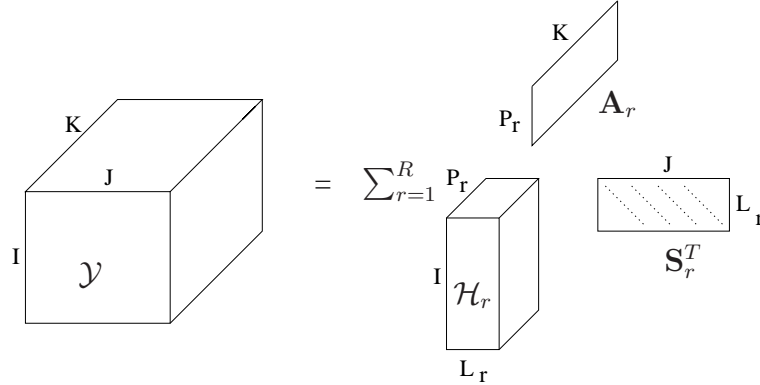


FIG. 4.4 – Décomposition en termes de rang- (L_r, P_r, \cdot) avec structure Toeplitz sur \mathbf{S}

Nous collectons tous les échantillons y_{ijk} , $i \in [1 : I]$, $j \in [1 : J]$, $k \in [1 : K]$, dans le tenseur des observations $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$.

Soit la matrice $\mathbf{A}_r \in \mathbb{C}^{K \times P_r}$ caractérisant la réponse des K antennes aux angles d'arrivée des P_r trajets de l'utilisateur r , telle que $[\mathbf{A}_r]_{k,p} = \beta_{p,r} a_k(\theta_{p,r})$, $p \in [1 : P_r]$, $k \in [1 : K]$.

Soit le tenseur $\mathcal{H}_r \in \mathbb{C}^{I \times L_r \times P_r}$, dont chacune des P_r tranches frontales $[\mathcal{H}_r]_{:, :, p} \in \mathbb{C}^{I \times L_r}$ contient les IL_r échantillons $e_{p,r}(i + (l-1)I)$, $i \in [1 : I]$, $l \in [1 : L_r]$.

Soit enfin la matrice Toeplitz $\mathbf{S}_r \in \mathbb{C}^{J \times L_r}$, telle que $[\mathbf{S}_r]_{j,l} = s_{j-l+1,r}$.

Le modèle algébrique strictement équivalent au modèle analytique de l'équation (4.4) est

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R \mathcal{H}_r \bullet_2 \mathbf{S}_r \bullet_3 \mathbf{A}_r. \quad (4.5)$$

Cette décomposition de \mathcal{Y} en termes de rang- (L_r, P_r, \cdot) , représentée par la figure 4.4, diffère de la décomposition en termes de rang- (L, P, \cdot) introduite dans le chapitre 3 sur les deux aspects suivants : d'une part les matrices \mathbf{S}_r ont une structure Toeplitz, d'autre part la longueur du canal L_r et le nombre de trajets P_r peuvent être différents selon l'utilisateur considéré, si bien que chaque utilisateur est caractérisé par une contribution de rang- (L_r, P_r, \cdot) au lieu d'une contribution de rang- (L, P, \cdot) .

4.6 Conclusion

Propagation	Problème	Modèle tensoriel
trajets directs	séparation aveugle	PARAFAC
trajets multiples, réflexions champ lointain	séparation et égalisation aveugle	BCM-(L,L,1)
trajets multiples, réflexions non uniquement dans le champ lointain	séparation et égalisation aveugle	BCM-(L,P,.)

TAB. 4.1 – Association entre modèles de propagation et récepteurs tensoriels

Dans ce chapitre, nous avons montré que le problème de séparation et d'égalisation aveugles de signaux CDMA peut être formulé en termes d'algèbre tensorielle. A chaque scénario de propagation considéré correspond une décomposition tensorielle donnée, comme illustré par le tableau 4.1.

Si la condition d'unicité de ces décompositions est respectée, leur calcul consiste à extraire les contributions des R utilisateurs présentes dans le tenseur des observations \mathcal{Y} . En ce sens, les récepteurs aveugles tensoriels proposés permettent la séparation des différentes sources présentes dans le mélange.

Si le canal engendre de l'IES, le récepteur doit également égaliser le signal estimé de chaque utilisateur. Ainsi, la structure Toeplitz des matrices contenant les symboles peut s'interpréter comme une opération de déconvolution.

Dans la suite logique de la démarche de modélisation présentée dans ce chapitre, il s'agit désormais de concevoir des algorithmes aveugles à la fois rapides et robustes pour le calcul des décompositions tensorielles. Cet aspect crucial est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 5

Les Algorithmes de Calcul des Décompositions Tensorielles

5.1 Introduction

Dans le chapitre 4, nous avons montré comment les nouvelles décompositions tensorielles introduites dans le chapitre 3 mènent à des récepteurs aveugles pour la liaison montante de systèmes CDMA. Le problème d'égalisation et de séparation aveugles des signaux reçus par un réseau d'antennes peut ainsi être résolu par la décomposition du tenseur des observations. Dans ce chapitre, nous proposons plusieurs algorithmes de calcul des décompositions tensorielles.

Dans la section 5.2, nous montrons comment l'algorithme des moindres carrés alternés (ALS pour "Alternating Least Squares"), fréquemment utilisé pour la décomposition PARAFAC, peut être adapté aux modèles plus généraux BCM-(L,L,1), BCM-(L,P,.) et BCM-(L,M,N) [31,32,35]. En particulier, pour l'application des modèles BCM-(L,L,1) et BCM-(L,P,.) proposée dans le chapitre précédent, nous montrerons comment la structure Toeplitz de la matrice des symboles peut être préservée à chaque itération, de manière à faciliter l'égalisation.

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré des valeurs différentes de L (longueur de la R.I. du canal) et P (nombre de trajets multiples) pour chaque utilisateur. Ainsi, les récepteurs multilinéaires aveugles correspondaient aux décompositions BCM- $(L_r, L_r, 1)$ et BCM- $(L_r, P_r, .)$. Dans ce chapitre ainsi que dans le suivant, nous considérons la même valeur de L et de P pour tous les utilisateurs. Cette hypothèse certes simplificatrice ne change pas la structure fondamentale des algorithmes proposés dans ce chapitre et permet d'alléger considérablement la notation.

Dans la section 5.3, nous montrons comment l'insertion d'une étape de recherche linéaire avant chaque itération de l'ALS permet d'améliorer considérablement les performances. Pour le modèle PARAFAC, plusieurs types de recherche linéaire existent. Récemment, les auteurs de [40,41] ont montré que pour des tenseurs réels, le pas optimal de la recherche linéaire peut être calculé et les performances obtenues sont remarquables par rapport à l'ALS standard. Dans [87,88], nous avons généralisé ce résultat au cas complexe et nous l'avons appliqué aux modèles plus généraux que PARAFAC.

Dans la section 5.4, nous proposons un algorithme d'optimisation de type Gauss-Newton : l'al-

gorithme de Levenberg-Marquardt [89,90]. Cet algorithme a été proposé pour la décomposition PARAFAC d'un tenseur réel dans [46]. Nous avons généralisé cet algorithme pour l'appliquer au calcul de la décomposition d'un tenseur complexe suivant le BCM [31,47].

Dans la section 5.5, nous montrons comment le tenseur des observations peut être préalablement compressé avant d'être décomposé par l'un des trois algorithmes précédents. Cette réduction de dimension permet un gain de temps considérable.

La section 5.6 présente quelques résultats de simulations sur des données non bruitées. L'étude de l'impact de divers facteurs sur les performances des algorithmes proposés permet de mettre en évidence les forces et les faiblesses de ceux-ci.

La section 5.7 présente quelques résultats de simulations de Monte-Carlo sur des données entachées d'un bruit blanc additif gaussien. Les performances du MMSE non-aveugle sont données comme point de comparaison.

5.2 L'algorithme ALS

Le principe général de cet algorithme est simple. Soit un tenseur \mathcal{Y} d'ordre N suivant une décomposition donnée, et dont les N matrices de données inconnues (une par dimension) sont notées $\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}$. Le tenseur \mathcal{Y} peut s'écrire matriciellement de N façons différentes, selon le type de découpage choisi. Notons $\mathbf{Y}^{(n)}$, $n = 1, \dots, N$, ces représentations matricielles. Pour chaque $\mathbf{Y}^{(n)}$, il existe une matrice $\mathbf{Z}^{(n)}$ construite à partir des $n - 1$ matrices de l'ensemble $\Omega = \{\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}\} - \{\mathbf{A}^{(n)}\}$ telle que

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{Z}^{(n)} \cdot \mathbf{A}^{(n)}. \quad (5.1)$$

Etant donné la connaissance de \mathcal{Y} uniquement, l'algorithme ALS consiste à exploiter les N équations du type (5.1) pour estimer les matrices $\mathbf{A}^{(n)}$ de manière alternée. Ainsi, étant donnée l'estimation précédente de toutes les matrices de l'ensemble Ω , l'estimation de $\mathbf{A}^{(n)}$ au sens des moindres carrés est obtenue par $\hat{\mathbf{A}}^{(n)} = (\mathbf{Z}^{(n)})^\dagger \cdot \mathbf{Y}^{(n)}$.

5.2.1 ALS-PARAFAC

L'ALS peut être considéré comme l'algorithme standard permettant de calculer la décomposition PARAFAC [30]. Rappelons tout d'abord les trois représentations matricielles du tenseur \mathcal{Y} données dans le chapitre 3 : $\mathbf{Y}_{IK \times J} = (\mathbf{H} \odot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S}^T$, $\mathbf{Y}_{JI \times K} = (\mathbf{S} \odot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A}^T$ et $\mathbf{Y}_{KJ \times I} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{H}^T$. Chaque représentation permet d'estimer l'une des trois matrices au sens des moindres carrés, les 2 autres étant fixées. L'algorithme 1 donne les étapes de l'ALS pour le modèle PARAFAC, où le superscript n indique l'estimation à la n ième itération.

En pratique, pour améliorer la stabilité numérique de l'algorithme, on insère une étape de normalisation des colonnes de $\mathbf{H}^{(n)}$ après sa mise à jour et de même pour $\mathbf{S}^{(n)}$. Cette étape ne change pas la solution du fait de l'indétermination du modèle (chaque colonne est estimée à un facteur d'échelle près).

Algorithme 1 : ALS-PARAFAC

```

Initialize  $\mathbf{S}^{(0)}$  and  $\mathbf{A}^{(0)}$ , set  $n = 1$ 
while  $\|\mathcal{Y}^{(n)} - \mathcal{Y}^{(n-1)}\|_F \geq \epsilon$  (e.g.  $\epsilon = 10^{-5}$ ) do
  -  $\mathbf{H}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{KJ \times I})^T \cdot \left( (\mathbf{A}^{(n-1)} \odot \mathbf{S}^{(n-1)})^T \right)^\dagger$ 
  -  $\mathbf{S}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{IK \times J})^T \cdot \left( (\mathbf{H}^{(n)} \odot \mathbf{A}^{(n-1)})^T \right)^\dagger$ 
  -  $\mathbf{A}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{JI \times K})^T \cdot \left( (\mathbf{S}^{(n)} \odot \mathbf{H}^{(n)})^T \right)^\dagger$ 
  - Set  $n \leftarrow n + 1$ 
end

```

5.2.2 ALS-BCM(L,L,1)

L'algorithme ALS pour la décomposition en termes de rang- $(L, L, 1)$ a été proposé dans [35,37]. Rappelons les trois représentations matricielles du tenseur des observations \mathcal{Y} données dans le chapitre 3 : $\mathbf{Y}_{IK \times J} = (\mathbf{H} \odot_R \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S}^T$, $\mathbf{Y}_{JI \times K} = [\text{vec}(\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{S}_1^T) \dots \text{vec}(\mathbf{H}_R \cdot \mathbf{S}_R^T)] \cdot \mathbf{A}^T$, $\mathbf{Y}_{KJ \times I} = (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{S}) \cdot \mathbf{H}^T$. L'algorithme 2 donne les étapes de l'ALS pour le BCM- $(L, L, 1)$.

Algorithme 2 : ALS-BCM(L,L,1) sans imposer la structure Toeplitz sur \mathbf{S}

```

Initialize  $\mathbf{S}^{(0)}$  and  $\mathbf{A}^{(0)}$ , set  $n = 1$ 
while  $\|\mathcal{Y}^{(n)} - \mathcal{Y}^{(n-1)}\|_F \geq \epsilon$  (e.g.  $\epsilon = 10^{-5}$ ) do
  -  $\mathbf{H}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{KJ \times I})^T \cdot \left( (\mathbf{A}^{(n-1)} \odot_R \mathbf{S}^{(n-1)})^T \right)^\dagger$ 
  -  $\mathbf{S}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{IK \times J})^T \cdot \left( (\mathbf{H}^{(n)} \odot_R \mathbf{A}^{(n-1)})^T \right)^\dagger$ 
  -  $\mathbf{A}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{JI \times K})^T \cdot \left( [\text{vec}(\mathbf{H}_1^{(n)} \cdot \mathbf{S}_1^{(n)T}) \dots \text{vec}(\mathbf{H}_R^{(n)} \cdot \mathbf{S}_R^{(n)T})]^T \right)^\dagger$ 
  - Set  $n \leftarrow n + 1$ 
end

```

Toutefois, les matrices \mathbf{S}_r ont une structure Toeplitz à cause l'IES et imposer cette structure à chaque itération de l'ALS permet de réduire l'ambiguïté sur ces matrices. En effet, les matrices d'ambiguïté $\mathbf{F}_r \in \mathbb{C}^{L \times L}$ sur \mathbf{S} dans l'équation (3.18) se réduisent dans ce cas à $\lambda \mathbf{I}_L$, où $\lambda \in \mathbb{C}$, car toute autre matrice détruirait la structure Toeplitz. En imposant cette structure sur \mathbf{S} , l'ambiguïté se réduit donc à un scalaire complexe, ce qui facilite l'étape d'égalisation. Pour estimer les symboles contenus dans \mathbf{S}_r , il faut trouver λ , ce que l'on peut faire en supposant par exemple le premier symbole $\mathbf{S}_r(1, 1)$ connu.

Pour imposer la structure Toeplitz à chaque itération de l'ALS, nous allons mettre à jour le vecteur générateur de la matrice \mathbf{S} au lieu de \mathbf{S} elle-même. Pour chaque utilisateur, la matrice des symboles transmis $\mathbf{S}_r \in \mathbb{C}^{J \times L}$ a la structure suivante :

$$\mathbf{S}_r^T = \begin{array}{cccc} & & & J \\ \begin{array}{c} S_{1,r} \\ S_{0,r} \\ \vdots \\ S_{2-L,r} \end{array} & \begin{array}{c} S_{2,r} \\ \vdots \\ S_{1,r} \\ S_{2,r} \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \vdots \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} S_{J-L+1,r} \\ \vdots \\ S_{J-1,r} \\ S_{J,r} \end{array} \\ & & & L \end{array}$$

Notons $\mathbf{s}_r = [s_{2-L,r}, s_{3-L,r}, \dots, s_{1,r}, s_{2,r}, \dots, s_{J,r}]^T$ le vecteur de taille $J + L - 1 \times 1$, générateur de \mathbf{S}_r et $\mathbf{s} = [\mathbf{s}_1; \mathbf{s}_2; \dots; \mathbf{s}_R]$ le vecteur de taille $R(J + L - 1) \times 1$, générateur de \mathbf{S} . La matrice $\mathbf{Y}_{IK \times J} = (\mathbf{H} \odot_R \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S}^T$ peut aussi s'écrire $\mathbf{Y}_{IK \times J} = \sum_{r=1}^R (\mathbf{H}_r \otimes \mathbf{a}_r) \cdot \mathbf{S}_r^T = \sum_{r=1}^R \mathbf{G}_r \cdot \mathbf{S}_r^T$, où $\mathbf{G}_r = \mathbf{H}_r \otimes \mathbf{a}_r$ est de taille $IK \times L$. Soit $Y_{JIK} = \text{vec}(\mathbf{Y}_{IK \times J})$. On a alors :

$$Y_{JIK} = \sum_{r=1}^R \mathbf{M}_r \cdot \mathbf{s}_r,$$

où la matrice $\mathbf{M}_r \in \mathbb{C}^{JIK \times J+L-1}$ est construite ainsi :

$$\mathbf{M}_r = \begin{pmatrix} [\mathbf{G}_r]_{:,L} & \dots & [\mathbf{G}_r]_{:,1} & \mathbf{0}_{IK} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0}_{IK} \\ \mathbf{0}_{IK} & [\mathbf{G}_r]_{:,L} & \dots & [\mathbf{G}_r]_{:,1} & \mathbf{0}_{IK} & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0}_{IK} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{IK} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0}_{IK} & [\mathbf{G}_r]_{:,L} & \dots & [\mathbf{G}_r]_{:,1} \end{pmatrix}$$

Le vecteur $[\mathbf{G}_r]_{:,l}$, $l \in [1 : L]$, représente la l ème colonne de \mathbf{G}_r , c'est à dire $[\mathbf{G}_r]_{:,l} = [\mathbf{H}_r]_{:,l} \otimes \mathbf{a}_r$. Par concaténation, on a donc

$$Y_{JIK} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{s}, \quad (5.2)$$

où $\mathbf{M} = [\mathbf{M}_1 \dots \mathbf{M}_R]$ est de taille $JIK \times R(J + L - 1)$. Nous sommes désormais en mesure de construire l'algorithme ALS pour le BCM-(L,L,1) qui impose la structure Toeplitz sur \mathbf{S} , cf. algorithme 3.

Algorithme 3 : *ALS-BCM(L,L,1) avec préservation de la structure Toeplitz sur \mathbf{S}*

Initialize $\mathbf{S}^{(0)}$ and $\mathbf{A}^{(0)}$, set $n = 1$

while $\|\mathcal{Y}^{(n)} - \mathcal{Y}^{(n-1)}\|_F \geq \epsilon$ (e.g. $\epsilon = 10^{-5}$) **do**

- $\mathbf{H}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{KJ \times I})^T \cdot ((\mathbf{A}^{(n-1)} \odot_R \mathbf{S}^{(n-1)})^T)^\dagger$
- $\mathbf{A}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{JI \times K})^T \cdot ([\text{vec}(\mathbf{H}_1^{(n)} \cdot \mathbf{S}_1^{(n-1)T}) \dots \text{vec}(\mathbf{H}_R^{(n)} \cdot \mathbf{S}_R^{(n-1)T})]^T)^\dagger$
- Build $\mathbf{M}^{(n)}$ from $\mathbf{H}^{(n)}$ and $\mathbf{A}^{(n)}$
- $\mathbf{s}^{(n)} = (\mathbf{M}^{(n)})^\dagger \cdot Y_{JIK}$
- Build $\mathbf{S}^{(n)}$ from its generator vector $\mathbf{s}^{(n)}$
- Set $n \leftarrow n + 1$

end

En pratique, on peut améliorer la stabilité numérique de l'algorithme en réalisant une décomposition QR de chaque sous-matrice \mathbf{H}_r de \mathbf{H} après la mise à jour de celle-ci. Ainsi, après avoir calculé $\mathbf{H}_r^{(n)} = \mathbf{Q}_r \cdot \mathbf{R}_r$, on peut choisir $\mathbf{H}_r^{(n)} = \mathbf{Q}_r$. Cette étape ne change pas la solution car

l'indétermination du modèle implique que l'on obtient en fait une estimation de l'espace généré par les colonnes de \mathbf{H}_r et non la matrice \mathbf{H}_r elle-même. Ainsi, \mathbf{R}_r peut être interprétée comme la matrice d'indétermination.

5.2.3 ALS-BCM(L,P,.)

L'algorithme ALS pour la décomposition en termes de rang- $(L, P, .)$ a été proposé dans [31,32]. Rappelons les trois représentations matricielles du tenseur des observations \mathcal{Y} données dans le chapitre 3 :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{IK \times J} &= [(\mathcal{H}_1 \bullet_3 \mathbf{A}_1)_{IK \times L} \dots (\mathcal{H}_R \bullet_3 \mathbf{A}_R)_{IK \times L}] \cdot \mathbf{S}^T \\ \mathbf{Y}_{JI \times K} &= [(\mathcal{H}_1 \bullet_2 \mathbf{S}_1)_{JI \times P} \dots (\mathcal{H}_R \bullet_2 \mathbf{S}_R)_{JI \times P}] \cdot \mathbf{A}^T \\ \mathbf{Y}_{KJ \times I} &= (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{S}) \cdot \mathbf{H}^T \end{cases} .$$

Si la structure Toeplitz de \mathbf{S} n'est pas prise en compte on peut construire l'algorithme ALS correspondant, cf. algorithme 4.

Algorithme 4 : ALS-BCM(L,P,.) sans imposer la structure Toeplitz sur \mathbf{S}

Initialize $\mathbf{S}^{(0)}$ and $\mathbf{A}^{(0)}$, set $n = 1$

while $\|\mathcal{Y}^{(n)} - \mathcal{Y}^{(n-1)}\|_F \geq \epsilon$ (e.g. $\epsilon = 10^{-5}$) **do**

- $\mathbf{H}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{KJ \times I})^T \cdot ((\mathbf{A}^{(n-1)} \odot \mathbf{S}^{(n-1)})^T)^\dagger$
- $\mathbf{S}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{IK \times J})^T \cdot \left([(\mathcal{H}_1^{(n)} \bullet_3 \mathbf{A}_1^{(n-1)})_{IK \times L} \dots (\mathcal{H}_R^{(n)} \bullet_3 \mathbf{A}_R^{(n-1)})_{IK \times L}]^T \right)^\dagger$
- $\mathbf{A}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{JI \times K})^T \cdot \left([(\mathcal{H}_1^{(n)} \bullet_2 \mathbf{S}_1^{(n)})_{JI \times P} \dots (\mathcal{H}_R^{(n)} \bullet_2 \mathbf{S}_R^{(n)})_{JI \times P}]^T \right)^\dagger$
- Set $n \leftarrow n + 1$

end

De même que précédemment, nous allons modifier la règle de mise à jour de \mathbf{S} de manière à imposer la structure Toeplitz pour effectuer l'égalisation à la réception. La décomposition de \mathcal{Y} selon le modèle BCM-(L,P,.) peut s'écrire $\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R \mathcal{G}_r \bullet_2 \mathbf{S}_r$, où $\mathcal{G}_r = \mathcal{H}_r \bullet_3 \mathbf{A}_r$ est un tenseur de taille $I \times L \times K$. Soit la représentation matricielle $\mathbf{G}_r \in \mathbb{C}^{IK \times L}$ du tenseur \mathcal{G}_r et soit $Y_{JIK} = \text{vec}(\mathbf{Y}_{IK \times J})$. On a alors :

$$Y_{JIK} = \sum_{r=1}^R \mathbf{M}_r \cdot \mathbf{s}_r,$$

où, comme dans la section précédente, la matrice $\mathbf{M}_r \in \mathbb{C}^{JIK \times J+L-1}$ est construite à partir de \mathbf{G}_r , et $\mathbf{s}_r \in \mathbb{C}^{J+L-1 \times 1}$ est le vecteur générateur de \mathbf{S}_r qui contient les symboles numériques appartenant à un alphabet fini. On aboutit donc à la même équation

$$Y_{JIK} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{s}, \tag{5.3}$$

où $\mathbf{M} = [\mathbf{M}_1 \dots \mathbf{M}_R]$ est de taille $JIK \times R(J+L-1)$. Nous sommes désormais en mesure de construire l'algorithme ALS pour le BCM-(L,P,.) qui impose la structure Toeplitz sur \mathbf{S} , cf. algorithme 5.

Algorithme 5 : *ALS BCM-(L,P,..) en préservant la structure Toeplitz*

```

Initialize  $\mathbf{S}^{(0)}$  and  $\mathbf{A}^{(0)}$ , set  $n = 1$ 
while  $\|\mathcal{Y}^{(n)} - \mathcal{Y}^{(n-1)}\|_F \geq \epsilon$  (e.g.  $\epsilon = 10^{-5}$ ) do
  -  $\mathbf{A}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{JI \times K})^T \cdot \left( [(\mathcal{H}_1^{(n-1)} \bullet_2 \mathbf{S}_1^{(n-1)})_{JI \times P} \dots (\mathcal{H}_R^{(n-1)} \bullet_2 \mathbf{S}_R^{(n-1)})_{JI \times P}]^T \right)^\dagger$ 
  -  $\mathbf{H}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{KJ \times I})^T \cdot ((\mathbf{A}^{(n)} \odot \mathbf{S}^{(n-1)})^T)^\dagger$ 
  - Build  $\mathbf{M}^{(n)}$  from  $\mathbf{H}^{(n)}$  and  $\mathbf{A}^{(n)}$ 
  -  $\mathbf{s}^{(n)} = (\mathbf{M}^{(n)})^\dagger \cdot \mathbf{Y}_{JIK}$ 
  - Build  $\mathbf{S}^{(n)}$  from its generator vector  $\mathbf{s}^{(n)}$ 
  - Set  $n \leftarrow n + 1$ 
end

```

En pratique, on peut améliorer la stabilité numérique de l'algorithme en réalisant la décomposition QR de chaque bloc \mathbf{A}_r de la matrice \mathbf{A} , $\mathbf{A}_r = \mathbf{Q}_r \cdot \mathbf{R}_r$, puis on peut choisir $\mathbf{A}_r = \mathbf{Q}_r$, dans la mesure où \mathbf{R}_r peut être interprétée comme l'indétermination sur \mathbf{A} . De même pour \mathbf{S} si l'algorithme ne préserve pas la structure Toeplitz.

5.2.4 ALS-BCM(L,M,N)

Bien que le BCM(L,M,N) n'intervienne pas directement dans le contexte applicatif considéré dans le chapitre 4, nous proposons l'algorithme ALS associé à ce modèle en partant des 4 expressions suivantes du tenseur \mathcal{Y} :

$$\mathbf{Y}_{IK \times J} = (\mathbf{H} \odot_R \mathbf{A}) \cdot \text{blockdiag}((\mathcal{D}_1)_{LN \times M}, \dots, (\mathcal{D}_R)_{LN \times M}) \cdot \mathbf{S}^T,$$

$$\mathbf{Y}_{JI \times K} = (\mathbf{S} \odot_R \mathbf{H}) \cdot \text{blockdiag}((\mathcal{D}_1)_{ML \times N}, \dots, (\mathcal{D}_R)_{ML \times N}) \cdot \mathbf{A}^T,$$

$$\mathbf{Y}_{KJ \times I} = (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{S}) \cdot \text{blockdiag}((\mathcal{D}_1)_{NM \times L}, \dots, (\mathcal{D}_R)_{NM \times L}) \cdot \mathbf{H}^T$$

$$\text{et } Y_{IJK} = (\mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{H}_R \otimes \mathbf{S}_R \otimes \mathbf{A}_R) \cdot \begin{pmatrix} (\mathcal{D}_1)_{LMN} \\ \vdots \\ (\mathcal{D}_R)_{LMN} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Soient } \mathbf{D}_{RLN \times RM} = \text{blockdiag}((\mathcal{D}_1)_{LN \times M}, \dots, (\mathcal{D}_R)_{LN \times M}),$$

$$\mathbf{D}_{RML \times RN} = \text{blockdiag}((\mathcal{D}_1)_{ML \times N}, \dots, (\mathcal{D}_R)_{ML \times N}),$$

$$\mathbf{D}_{RNM \times RL} = \text{blockdiag}((\mathcal{D}_1)_{NM \times L}, \dots, (\mathcal{D}_R)_{NM \times L})$$

$$\text{et } \mathbf{D}_{RLMN} = \begin{pmatrix} (\mathcal{D}_1)_{LMN} \\ \vdots \\ (\mathcal{D}_R)_{LMN} \end{pmatrix}.$$

L'algorithme 6 donne les étapes de l'ALS pour le modèle BCM(L,M,N).

La stabilité numérique de l'algorithme peut être améliorée en pratique en réalisant une décomposition QR de toutes les matrices \mathbf{A}_r , \mathbf{S}_r et \mathbf{H}_r après leur mise à jour.

Algorithme 6 : *ALS-BCM*(L, M, N)

```

Initialize  $\mathbf{S}^{(0)}$  and  $\mathbf{S}^{(0)}$ , set  $n = 1$ 
while  $\|\mathcal{Y}^{(n)} - \mathcal{Y}^{(n-1)}\|_F \geq \epsilon$  (e.g.  $\epsilon = 10^{-5}$ ) do
  -  $\mathbf{H}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{KJ \times I})^T \cdot \left( (\mathbf{A}^{(n-1)} \odot \mathbf{S}^{(n-1)})^T \right)^\dagger \left( (\mathbf{D}_{RNM \times RL}^{(n-1)})^T \right)^\dagger$ 
  -  $\mathbf{S}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{IK \times J})^T \cdot \left( (\mathbf{H}^{(n)} \odot \mathbf{A}^{(n-1)})^T \right)^\dagger \left( (\mathbf{D}_{RLN \times RM}^{(n-1)})^T \right)^\dagger$ 
  -  $\mathbf{A}^{(n)} = (\mathbf{Y}_{JI \times K})^T \cdot \left( (\mathbf{S}^{(n)} \odot \mathbf{H}^{(n)})^T \right)^\dagger \left( (\mathbf{D}_{RML \times RN}^{(n-1)})^T \right)^\dagger$ 
  -  $\mathbf{D}_{RLMN}^{(n)} = (\mathbf{H}_1^{(n)} \otimes \mathbf{S}_1^{(n)} \otimes \mathbf{A}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{H}_R^{(n)} \otimes \mathbf{S}_R^{(n)} \otimes \mathbf{A}_R^{(n)})^\dagger \cdot Y_{IJK}$ 
  - Set  $n \leftarrow n + 1$ 
end

```

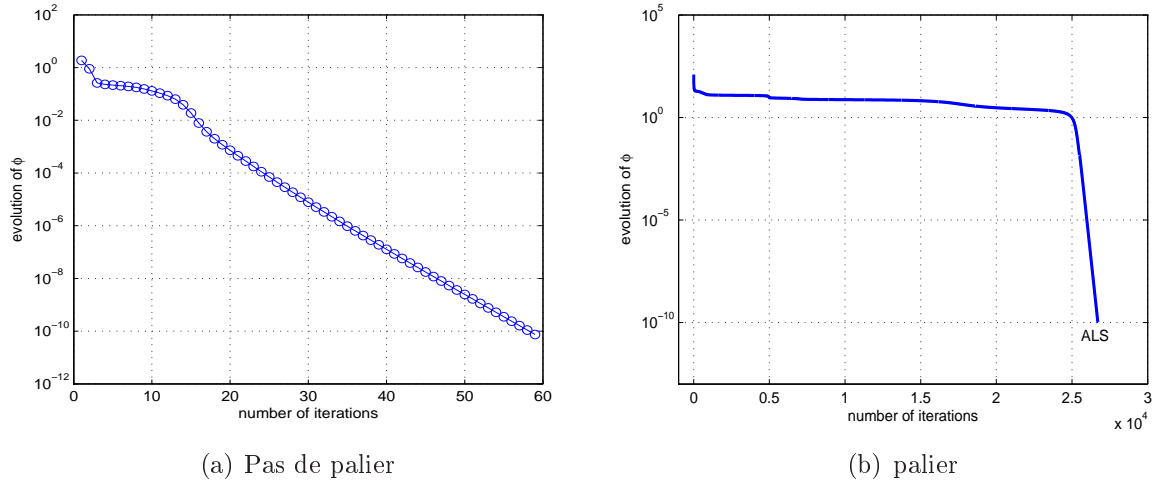
5.2.5 Inconvénients de l'ALS

Bien que relativement aisé à mettre en oeuvre, l'algorithme ALS est connu pour converger lentement lorsqu'il est appliqué à des données présentant un fort degré de colinéarité. Cet algorithme est donc sensible au conditionnement des données à estimer, qu'il soit employé pour le calcul de la décomposition PARAFAC [91] ou des modèles généralisés [31]. Lorsque les matrices inconnues sont mal conditionnées, ou lorsque les matrices estimées lors d'une itération sont mal conditionnées, l'ALS traverse un palier, c'est à dire une région où la fonction de coût ne diminue presque plus, avant de diminuer à nouveau [92]. La figure 5.1 illustre le comportement typique de l'ALS pour la séparation de données non bruitées. La figure 5.1(a) représente l'évolution de la fonction de coût ϕ pour un problème "facile", c'est à dire pour des données bien conditionnées. La convergence de l'ALS est linéaire. La figure 5.1(b) représente l'évolution typique de ϕ pour des données mal conditionnées. La fonction de coût stagne sur un palier durant $2,5 \cdot 10^4$ itérations avant de décroître à nouveau. Il s'avère que la longueur de ce palier augmente avec le conditionnement des données (nous illustrerons cet aspect plus en détail par la suite). Une solution permettant de réduire la taille de ce palier est d'insérer un étape de recherche linéaire avant chaque itération de l'ALS. C'est l'objet de la section suivante.

5.3 Ajout d'une étape de Recherche Linéaire optimisée

5.3.1 Principe

La recherche linéaire a été proposée dans [30, 66] afin d'accélérer la convergence de l'ALS pour le calcul de la décomposition PARAFAC. A l'itération n , la recherche linéaire consiste en l'interpolation linéaire des facteurs inconnus \mathbf{H} , \mathbf{A} et \mathbf{S} à partir de leurs estimations aux itérations $n-1$ et $n-2$. Cette étape est effectuée avant chaque itération de l'ALS et les matrices interpolées sont directement utilisées en entrée de l'itération l'ALS. Ces matrices interpolées,

FIG. 5.1 – Convergence typique de l'ALS : évolution de ϕ pour des données non bruitées

que l'on note $\mathbf{H}^{(new)}$, $\mathbf{A}^{(new)}$ et $\mathbf{S}^{(new)}$, sont définies par

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{(new)} &= \mathbf{A}^{(n-2)} + \rho (\mathbf{A}^{(n-1)} - \mathbf{A}^{(n-2)}) \\ \mathbf{S}^{(new)} &= \mathbf{S}^{(n-2)} + \rho (\mathbf{S}^{(n-1)} - \mathbf{S}^{(n-2)}) \\ \mathbf{H}^{(new)} &= \mathbf{H}^{(n-2)} + \rho (\mathbf{H}^{(n-1)} - \mathbf{H}^{(n-2)}) \end{cases} . \quad (5.4)$$

Les matrices $\mathbf{G}_A^{(n)} = \mathbf{A}^{(n-1)} - \mathbf{A}^{(n-2)}$, $\mathbf{G}_S^{(n)} = \mathbf{S}^{(n-1)} - \mathbf{S}^{(n-2)}$ et $\mathbf{G}_H^{(n)} = \mathbf{H}^{(n-1)} - \mathbf{H}^{(n-2)}$ sont les directions de recherche. Le choix du pas ρ effectué dans ces directions de recherche est primordial car il conditionne l'accélération de la convergence de l'ALS standard. Dans [30], le pas a une valeur fixée (entre 1.2 et 1.3). Dans [66], le pas est $\rho = n^{1/3}$ et l'étape de recherche linéaire est acceptée uniquement si la valeur interpolée de la fonction de coût, $\phi(\mathbf{H}^{(new)}, \mathbf{S}^{(new)}, \mathbf{A}^{(new)})$, est inférieure à sa valeur courante. Notons que si $\rho = 1$, on a $\mathbf{A}^{(new)} = \mathbf{A}^{(n-1)}$, $\mathbf{S}^{(new)} = \mathbf{S}^{(n-1)}$ et $\mathbf{H}^{(new)} = \mathbf{H}^{(n-1)}$, c'est à dire une mise à jour ALS standard : la recherche linéaire est annihilée. Pour des tenseurs réels suivant le modèle PARAFAC, un résultat remarquable a été obtenu dans [40,41], où les auteurs ont montré que le pas réel optimal peut être déterminé en calculant les racines d'un polynôme de degré 5. La méthode proposée est appelée ELS, pour "Enhanced Line Search".

C'est cette idée que nous proposons de généraliser aux tenseurs complexes suivant le modèle PARAFAC ou un modèle plus général. Dans la suite, nous proposons donc une technique de recherche linéaire optimisée avec pas complexe, nommée ELSCS pour "Enhanced Line Search with Complex Step" [87,88].

5.3.2 Recherche linéaire optimisée avec pas complexe (ELSCS)

Pour le modèle PARAFAC, l'une des expressions possibles de la fonction de coût est

$$\phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{Y}_{KJ \times I} - (\mathbf{A} \odot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{H}^T\|_F^2. \quad (5.5)$$

Pour les modèles BCM-(L,L,1) et BCM(L,P,..), une expression de la fonction de coût est

$$\phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{Y}_{KJ \times I} - (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{S}) \cdot \mathbf{H}^T\|_F^2. \quad (5.6)$$

Selon le modèle considéré, les dimensions des matrices \mathbf{A} , \mathbf{S} et \mathbf{H} ne sont pas les mêmes mais le principe général de la recherche linéaire optimisée que nous allons expliciter ici est strictement identique pour tous les modèles. Certes la fonction de coût pour le modèle PARAFAC fait intervenir le produit de Khatri-Rao (\odot) tandis que les modèles BCM font intervenir le produit de Kronecker partitionné (\odot_R). Cependant, c'est une propriété commune à ces deux produits que nous allons utiliser.

Propriété : *Pour toutes matrices \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 de même dimensions et pour toute matrice \mathbf{U} ayant le même nombre de colonnes que \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 , on a $\mathbf{U} \odot (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \mathbf{U} \odot \mathbf{V}_1 + \mathbf{U} \odot \mathbf{V}_2$. De manière similaire, pour toutes matrices \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 de même dimensions et partitionnées en R blocs, et pour toute matrice \mathbf{U} partitionnée également en R blocs, on a $\mathbf{U} \odot_R (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \mathbf{U} \odot_R \mathbf{V}_1 + \mathbf{U} \odot_R \mathbf{V}_2$.*

Ainsi, toutes les expressions obtenues pour le BCM dans la suite de ce paragraphe sont identiques pour PARAFAC, à la seule condition de substituer \odot à \odot_R .

Tout d'abord, la combinaison de (5.4) et de (5.6) montre que, étant donné les estimations de \mathbf{H} , \mathbf{A} et \mathbf{S} aux itérations $n - 1$ et $n - 2$, le pas optimal ρ à l'itération n minimise

$$\begin{aligned} \phi_{ELSCS}^{(n)} &= \left\| (\mathbf{A}^{(new)} \odot_R \mathbf{S}^{(new)}) \cdot (\mathbf{H}^{(new)})^T - \mathbf{Y}_{KJ \times I} \right\|_F^2 \\ &= \left\| \left((\mathbf{A}^{(n-2)} + \rho \mathbf{G}_A^{(n)}) \odot_R (\mathbf{S}^{(n-2)} + \rho \mathbf{G}_S^{(n)}) \right) \cdot \left(\mathbf{H}^{(n-2)} + \rho \mathbf{G}_H^{(n)} \right)^T - \mathbf{Y}_{KJ \times I} \right\|_F^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

En utilisant la propriété précédente de \odot_R , l'équation (5.7) peut s'écrire

$$\phi_{ELSCS}^{(n)} = \|\rho^3 \mathbf{T}_3 + \rho^2 \mathbf{T}_2 + \rho \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_0\|_F^2, \quad (5.8)$$

où les matrices \mathbf{T}_3 , \mathbf{T}_2 , \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_0 , de taille $KJ \times I$, sont définies par

$$\begin{cases} \mathbf{T}_3 &= (\mathbf{G}_A \odot_R \mathbf{G}_S) \mathbf{G}_H \\ \mathbf{T}_2 &= (\mathbf{G}_A \odot_R \mathbf{G}_S) \mathbf{H} + (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{G}_S + \mathbf{G}_A \odot_R \mathbf{S}) \mathbf{G}_H \\ \mathbf{T}_1 &= (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{S}) \mathbf{G}_H + (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{G}_S + \mathbf{G}_A \odot_R \mathbf{S}) \mathbf{H} \\ \mathbf{T}_0 &= (\mathbf{A} \odot_R \mathbf{S}) \mathbf{H} - \mathbf{Y}_{KJ \times I} \end{cases},$$

et où n et $n - 2$ ont été omis pour simplifier la notation. Soit la matrice $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{IKJ \times 4}$ définie par

$$\mathbf{T} = [\text{Vec}(\mathbf{T}_3) | \text{Vec}(\mathbf{T}_2) | \text{Vec}(\mathbf{T}_1) | \text{Vec}(\mathbf{T}_0)].$$

L'équation (5.8) est équivalente à

$$\phi_{ELSCS}^{(n)} = \|\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}\|_F^2 = \mathbf{u}^H \cdot \mathbf{T}^H \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}, \quad (5.9)$$

où $\mathbf{u} = [\rho^3, \rho^2, \rho, 1]^T$ est inconnu.

Pour des données *réelles*, (5.9) s'écrit $\phi_{ELSCS}^{(n)} = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$, qui est un polynôme de degré 6 et de variable réelle ρ . Le pas optimal réel peut donc être déterminé selon la technique ELS proposée dans [40, 41]. Cependant, les données traitées dans l'application d'égalisation et de séparation aveugles de signaux CDMA sont complexes et nous allons proposer une technique de calcul du pas optimal complexe. Notons ce pas $\rho = r.e^{i\theta}$, où r est le module de ρ et θ son argument. Notre approche est itérative et consiste à minimiser $\phi_{ELSCS}^{(n)}$ en alternant les mises à jour de r et θ . La complexité de l'itération est faible comparativement à l'itération ALS, puisque la mise à jour de r et θ consiste à trouver les racines de polynômes respectivement de degré 5 et 6, comme nous le montrons dans le paragraphe suivant.

5.3.3 Calcul du pas complexe

La matrice connue $\Delta = \mathbf{T}^H \cdot \mathbf{T}$ de taille 4×4 a des éléments complexes définis par $[\Delta]_{m,n} = \alpha_{m,n} + j\beta_{m,n}$. Puisque Δ est hermitienne, $\alpha_{m,n} = \alpha_{n,m}$, $\beta_{m,n} = -\beta_{n,m}$ et $\beta_{m,m} = 0$:

$$Real(\Delta) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{bmatrix}, \quad Im(\Delta) = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ -\beta_{12} & 0 & \beta_{23} & \beta_{24} \\ -\beta_{13} & -\beta_{23} & 0 & \beta_{34} \\ -\beta_{14} & -\beta_{24} & -\beta_{34} & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Minimisation partielle de ϕ_{ELSCS} par rapport à r :

A partir de (5.9), on peut réécrire $\phi_{ELSCS} = \mathbf{u}^H \cdot \Delta \cdot \mathbf{u}$ sous forme d'un polynôme de degré 6 de la variable r , $\phi_{ELSCS}(r) = \sum_{p=0}^6 x_p r^p$, dont les coefficients x_p dépendent uniquement de θ et des coefficients de Δ :

$$\begin{cases} x_6 = & \alpha_{11} \\ x_5 = & 2\alpha_{12}\cos(\theta) + 2\beta_{12}\sin(\theta) \\ x_4 = & \alpha_{22} + 2\alpha_{13}\cos(2\theta) + 2\beta_{13}\sin(2\theta) \\ x_3 = & 2\alpha_{14}\cos(3\theta) + 2\alpha_{23}\cos(\theta) + 2\beta_{14}\sin(3\theta) + 2\beta_{23}\sin(\theta) \\ x_2 = & \alpha_{33} + 2\alpha_{24}\cos(2\theta) + 2\beta_{24}\sin(2\theta) \\ x_1 = & 2\alpha_{34}\cos(\theta) + 2\beta_{34}\sin(\theta) \\ x_0 = & \alpha_{44} \end{cases}.$$

Etant donné la dernière mise à jour de θ , la minimisation partielle de ϕ_{ELSCS} par rapport à r consiste donc à trouver la racine de

$$\frac{\delta\phi_{ELSCS}(r)}{\delta r} = \sum_{p=0}^5 (p+1)x_{p+1}r^p \quad (5.10)$$

qui minimise $\phi_{ELSCS}(r)$.

(b) Minimisation partielle de ϕ_{ELSCS} par rapport à θ

On peut montrer que :

$$\phi_{ELSCS}(\theta) = a_1\cos(3\theta) + a_2\cos(2\theta) + a_3\cos(\theta) + a_4 + b_1\sin(3\theta) + b_2\sin(2\theta) + b_3\sin(\theta), \quad (5.11)$$

où les a_i ne dépendent que de r et des coeffs des $\alpha_{m,n}$ et les b_i ne dépendent que de r et des $\beta_{m,n}$:

$$\begin{cases} a_1 = & 2r^3\alpha_{14} \\ a_2 = & 2r^4\alpha_{13} + 2r^2\alpha_{24} \\ a_3 = & 2r^5\alpha_{12} + 2r^3\alpha_{23} + 2r\alpha_{34} \\ a_4 = & r^6\alpha_{11} + r^4\alpha_{22} + r^2\alpha_{33} + \alpha_{44} \quad . \\ b_1 = & 2r^3\beta_{14} \\ b_2 = & 2r^4\beta_{13} + 2r^2\beta_{24} \\ b_3 = & 2r^5\beta_{12} + 2r^3\beta_{23} + 2r\beta_{34} \end{cases}$$

La dérivée partielle de $\phi_{ELSCS}(\theta)$ par rapport à θ s'écrit

$$\frac{\delta\phi_{ELSCS}(\theta)}{\delta\theta} = -3\alpha_1\sin(3\theta) - 2\alpha_2\sin(2\theta) - \alpha_3\sin(\theta) + 3\beta_1\cos(3\theta) + 2\beta_2\cos(2\theta) + \beta_3\cos(\theta). \quad (5.12)$$

Après le changement de variable $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ et la substitution de $\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$ dans (5.12), on obtient

$$\frac{\delta\phi_{ELSCS}(t)}{\delta\theta} = \frac{\sum_{p=0}^6 d_p t^p}{(1+t^2)^3}, \quad (5.13)$$

où les coefficients d_p ne dépendent pas de θ :

$$\begin{cases} d_6 = & -3b_1 + 2b_2 - b_3 \\ d_5 = & -18a_1 + 8a_2 - 2a_3 \\ d_4 = & 45b_1 - 10b_2 - b_3 \\ d_3 = & 60a_1 - 4a_3 \\ d_2 = & -45b_1 - 10b_2 + b_3 \\ d_1 = & -18a_1 - 8a_2 - 2a_3 \\ d_0 = & 3b_1 + 2b_2 + b_3 \end{cases}$$

Etant donné la dernière mise à jour de r , la minimisation partielle de ϕ_{ELSCS} par rapport à θ consiste donc à trouver la racine de $\frac{\delta\phi_{ELSCS}(t)}{\delta r} = \frac{\sum_{p=0}^6 d_p t^p}{(1+t^2)^3}$ qui minimise $\phi_{ELSCS}(t)$.

5.3.4 Schéma de l'algorithme ALS+ELSCS

L'algorithme ELSCS consiste à trouver ρ en minimisant ϕ_{ELSCS} de manière alternée par rapport à r et θ . Ce schéma itératif est ensuite inséré dans l'ALS standard, comme figuré dans l'algorithme 7.

Qu'il s'agisse du modèle PARAFAC ou d'un modèle plus général et que la structure Toeplitz de \mathbf{S} soit préservée ou non, l'algorithme ALS+ELSCS garde la même structure.

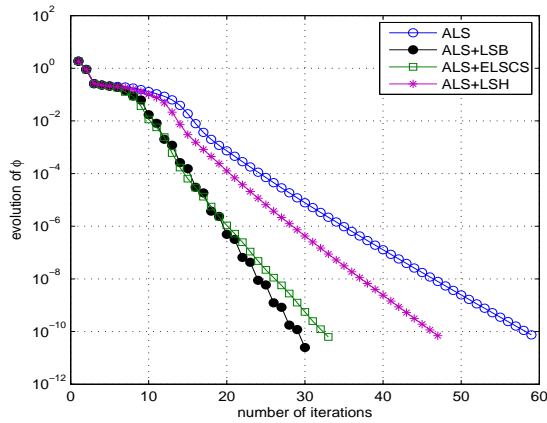
Les figures 5.2(a) et 5.2(b) représentent l'évolution typique de la fonction de coût ϕ , pour les algorithmes ALS seul, ALS+LSB (Line Search proposée par Bro dans [66], c'est à dire $\rho = n^{1/3}$), ALS+LSH (Line Search proposée par Harshman dans [30], c'est à dire $\rho = 1.25$) et ALS+ELSCS.

Algorithme 7 : ALS+ELSCS

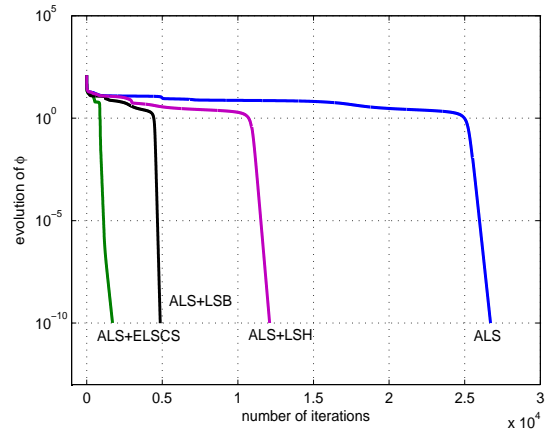
```

Initialize  $\mathbf{H}^{(0)}$ ,  $\mathbf{H}^{(1)}$ ,  $\mathbf{S}^{(0)}$ ,  $\mathbf{S}^{(1)}$ ,  $\mathbf{A}^{(0)}$ ,  $\mathbf{A}^{(1)}$ , set  $n = 1$ ;
while  $\|\mathcal{Y}^{(n)} - \mathcal{Y}^{(n-1)}\|_F > \epsilon_1$  (e.g.  $\epsilon_1 = 10^{-6}$ ) do
  -  $n \leftarrow n + 1$ ;
  — Start ELSCS scheme —
  - Set  $p = 1$ ;
  while  $|\phi_{ELSCS}^{(p)} - \phi_{ELSCS}^{(p-1)}| > \epsilon_2$  (e.g.  $\epsilon_2 = 10^{-4}$ ) do
    - update  $r$  from (5.10) with  $\theta$  fixed;
    - update  $\theta$  from (5.13) with  $r$  fixed;
    -  $p \leftarrow p + 1$ ;
  end
  - Build  $\mathbf{A}^{(new)}$ ,  $\mathbf{S}^{(new)}$  and  $\mathbf{H}^{(new)}$  from (5.4);
  — Start ALS updates —
  - Find  $\mathbf{S}^{(n)}$  from  $\mathbf{H}^{(new)}$  and  $\mathbf{A}^{(new)}$ ;
  - Find  $\mathbf{H}^{(n)}$  from  $\mathbf{A}^{(new)}$  and  $\mathbf{S}^{(n)}$ ;
  - Find  $\mathbf{A}^{(n)}$  from  $\mathbf{S}^{(n)}$  and  $\mathbf{H}^{(n)}$ ;
  - Build  $\mathcal{Y}^{(n)}$  from  $\mathbf{S}^{(n)}$ ,  $\mathbf{H}^{(n)}$  and  $\mathbf{A}^{(n)}$ ;
end

```



(a) pas de palier



(b) palier

FIG. 5.2 – Convergence typique des algorithmes avec Line Search

Pour le problème bien conditionné de la figure 5.2(a), les algorithmes ALS+LSB et ALS+ELSCS ont des performances similaires et permettent de réduire le nombre d'itérations d'un facteur 2 par rapport à l'ALS. L'algorithme ALS+LSH a permis de gagner quelques itérations. L'ajout d'une étape de recherche linéaire permet ainsi d'augmenter le taux de convergence par rapport à l'ALS standard.

Pour le problème mal conditionné de la figure 5.2(b), les 3 algorithmes utilisant une étape de recherche linéaire ont permis de réduire considérablement la longueur du palier. L'ALS standard a convergé en $2,7 \cdot 10^4$ itérations, l'algorithme ALS+LSH en $1,2 \cdot 10^4$ itérations, l'algorithme ALS+LSB en $5 \cdot 10^3$ itérations et l'algorithme ALS+ELSCS en $2 \cdot 10^3$ itérations. Il n'est pas nécessaire d'exiger une très grande précision dans le sous-algorithme ELSCS : en général, en choisissant $\epsilon_2 = 10^{-4}$, le critère d'arrêt est satisfait en moins de $p = 10$ itérations. De plus, la complexité d'une itération de l'ELSCS est faible (calcul des racines de deux polynômes de degré 5 et 6) comparée à la complexité de la mise à jour ALS. Par conséquent, si le gain en nombre d'itérations est de $G\%$ par rapport à l'ALS seul, le gain en temps de calcul est approximativement le même. Nous illustrerons cet aspect plus en détail dans la section 5.6.

5.4 L'algorithme de Levenberg-Marquardt (LM)

L'algorithme de Levenberg-Marquardt (LM) est basé sur une mise à jour de type Gauss-Newton des inconnues. Pour une itération donnée, toutes les inconnues sont estimées conjointement, contrairement à l'ALS qui met à jour les composantes de manière alternée. Cet algorithme a été proposé notamment dans [46] pour le calcul de la décomposition PARAFAC. Dans la section 5.4.1, nous explicitons cet algorithme d'une manière générale, valable pour les modèles PARAFAC, BCM-(L,L,1) et BCM-(L,P,.). Les équations seront donc formulées de manière générique en fonctions des matrices \mathbf{A} , \mathbf{H} et \mathbf{S} , dont les dimensions diffèrent selon le modèle considéré. Les spécificités de cet algorithme propres à chacun des modèles seront développées dans les sections 5.4.2, 5.4.3 et 5.4.4.

5.4.1 Principe général

Considérons les vecteurs colonnes $\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{A}}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{A}}^T)$, $\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{H}}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{H}}^T)$ et $\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{S}}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{S}}^T)$ qui contiennent respectivement les éléments des matrices estimées $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{H}}$ et $\hat{\mathbf{S}}$. Soit le vecteur \mathbf{p} , qui résulte de la concaténation de toutes les inconnues,

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{A}}} \\ \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{H}}} \\ \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{S}}} \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

et soit F la taille de \mathbf{p} , c'est à dire le nombre total d'inconnues.

Notons $M = KJI$. Soit $\hat{\mathcal{Y}} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ une estimation du tenseur des observations et soit $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ une représentation vectorielle de $\hat{\mathcal{Y}}$, construite à partir de \mathbf{p} en fonction du modèle considéré. De même, on note $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ une représentation vectorielle du tenseur des observations \mathcal{Y} . Le vecteur des résidus, de taille $M \times 1$, s'écrit donc $\mathbf{r}(\mathbf{p}) = \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$.

Considérons la fonction de coût

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{r}(\mathbf{p})\|_F^2 = \frac{1}{2} \mathbf{r}(\mathbf{p})^H \mathbf{r}(\mathbf{p}), \quad (5.15)$$

qui est la même que pour l'ALS au facteur $\frac{1}{2}$ près, introduit ici pour simplifier les notations à venir. Etant donnée une estimation $\mathbf{p}^{(n)}$ de \mathbf{p} à l'itération n , $\mathbf{p}^{(n+1)}$ est obtenu par

$$\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(n)} + \Delta \mathbf{p}, \quad (5.16)$$

où le pas $\Delta \mathbf{p}$ doit être calculé de manière à garantir une direction de descente pour ϕ . L'équation (5.16) définit la règle de mise à jour de \mathbf{p} .

La méthode de Gauss-Newton se base sur l'approximation des résidus au voisinage de $\mathbf{p}^{(n)}$ par un développement en série de Taylor tronqué après le terme d'ordre 1. Ainsi, pour $\|\Delta \mathbf{p}\|$ assez petit, on a :

$$\mathbf{r}(\mathbf{p}^{(n)} + \Delta \mathbf{p}) \simeq \mathbf{r}(\mathbf{p}^{(n)}) + \mathbf{J}(\mathbf{p}^{(n)}) \Delta \mathbf{p}, \quad (5.17)$$

où $\mathbf{J}(\mathbf{p}^{(n)})$ est la matrice Jacobienne de taille $M \times F$ dont les éléments j_{mf} sont définis par

$$j_{mf} = \frac{\delta r_m(\mathbf{p}^{(n)})}{\delta p_f} = \frac{\delta \hat{y}_m(\mathbf{p}^{(n)})}{\delta p_f}. \quad (5.18)$$

En utilisant l'approximation de $\mathbf{r}(\mathbf{p}^{(n+1)})$ définie par l'équation (5.17), on peut écrire l'expression de la fonction de coût (5.15) après correction, en fonction de $\Delta \mathbf{p}$:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{p}^{(n)} + \Delta \mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \mathbf{r}(\mathbf{p}^{(n)} + \Delta \mathbf{p})^H \mathbf{r}(\mathbf{p}^{(n)} + \Delta \mathbf{p}) \\ &\simeq \frac{1}{2} \mathbf{r}^H \mathbf{r} + \Delta \mathbf{p}^H \mathbf{J}^H \mathbf{r} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{p}^H \mathbf{J}^H \mathbf{J} \Delta \mathbf{p} \\ &= \phi(\mathbf{p}^{(n)}) + \Delta \mathbf{p}^H \mathbf{J}^H \mathbf{r} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{p}^H \mathbf{J}^H \mathbf{J} \Delta \mathbf{p}, \\ &\equiv \tilde{\phi}(\Delta \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

où \mathbf{r} et \mathbf{J} représentent respectivement $\mathbf{r}(\mathbf{p}^{(n)})$ et $\mathbf{J}(\mathbf{p}^{(n)})$. Le pas $\Delta \mathbf{p}$ pour la mise à jour de type Gauss-Newton de \mathbf{p} est solution de

$$\Delta \mathbf{p} = \operatorname{argmin}_{\Delta \mathbf{p}} \{ \tilde{\phi}(\Delta \mathbf{p}) \}.$$

Le gradient et le Hessien de $\tilde{\phi}$ sont

$$\tilde{\phi}'(\Delta \mathbf{p}) = \mathbf{J}^H \mathbf{r} + \mathbf{J}^H \mathbf{J} \Delta \mathbf{p}, \quad \tilde{\phi}''(\Delta \mathbf{p}) = \mathbf{J}^H \mathbf{J}. \quad (5.20)$$

La matrice symétrique $\tilde{\phi}''(\Delta \mathbf{p})$ est indépendante de $\Delta \mathbf{p}$. De plus, si la matrice \mathbf{J} de taille $M \times F$ est de rang F , alors $\tilde{\phi}''(\Delta \mathbf{p})$ est définie positive, ce qui implique que $\tilde{\phi}(\Delta \mathbf{p})$ a un unique minimum [90]. Ce minimum peut être trouvé par la résolution de

$$\tilde{\phi}'(\Delta \mathbf{p}) = 0 \iff (\mathbf{J}^H \mathbf{J}) \Delta \mathbf{p} = -\mathbf{J}^H \mathbf{r}. \quad (5.21)$$

On peut simplifier la partie droite de cette équation. En partant de $\phi : \mathbb{C}^F \mapsto \mathbb{R}$ donnée par l'équation (5.15), on a

$$\frac{\delta \phi}{\delta p_f}(\mathbf{p}^{(n)}) = \sum_{m=1}^M \left[\frac{\delta r_m}{\delta p_f}(\mathbf{p}^{(n)}) \right]^* r_m(\mathbf{p}^{(n)}).$$

Ainsi, le gradient de ϕ en $\mathbf{p}^{(n)}$ est

$$\mathbf{g} \stackrel{\text{def}}{=} \phi'(\mathbf{p}^{(n)}) = \mathbf{J}(\mathbf{p}^{(n)})^H \mathbf{r}(\mathbf{p}^{(n)}). \quad (5.22)$$

Finalement, la correction $\Delta\mathbf{p}$ qui minimise $\tilde{\phi}(\Delta\mathbf{p})$ est obtenue par la résolution du système d'équations normales suivant

$$(\mathbf{J}^H \mathbf{J}) \Delta\mathbf{p} = -\mathbf{g}, \quad (5.23)$$

où $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^{F \times 1}$ est le gradient de ϕ en $\mathbf{p}^{(n)}$ et \mathbf{J} représente $\mathbf{J}(\mathbf{p}^{(n)})$.

Cependant, cette mise à jour nécessite que le Jacobien \mathbf{J} soit de rang plein à chaque étape. Or, il s'avère que les modèles PARAFAC, BCM-(L,L,1) et BCM-(L,P,..) possèdent des degrés de liberté provenant des indéterminations intrinsèques à ces modèles multilinéaires. En effet, pour chaque modèle il est possible de fixer un certain nombre d'inconnues parmi F , dans la mesure où l'on peut "compenser" ce choix en exploitant l'indétermination. Nous reviendrons sur cet aspect dans les sections 5.4.2, 5.4.3 et 5.4.4. A cause de cette sur-paramétrisation, \mathbf{J} a un certain nombre de valeurs singulières nulles, si bien que la mise à jour de Gauss-Newton ne peut pas être employée telle quelle. Une solution possible à ce problème est la méthode de Levenberg-Marquardt [89], qui consiste à mettre à jour $\Delta\mathbf{p}$ à partir des équations normales modifiées :

$$(\mathbf{J}^H \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I}_F) \Delta\mathbf{p} = -\mathbf{g}, \quad (5.24)$$

où le facteur d'amortissement $\lambda > 0$ rend $\mathbf{J}^H \mathbf{J}$ définie positive et assure une direction de descente. Notons un effet important du facteur d'amortissement :

- Pour une grande valeur de λ , (5.24) donne $\Delta\mathbf{p} \simeq -\frac{1}{\lambda} \mathbf{g}$, c'est à dire un faible pas dans la direction de descente de la plus grande pente.
- Pour une faible valeur de λ , (5.24) se réduit à (5.23), c'est à dire une mise à jour de type Gauss-Newton.

La procédure de mise à jour de ce facteur λ est précisément décrite dans [90]. Elle est basée sur la mesure du gain ρ

$$\rho = \frac{\phi(\mathbf{p}^{(n)}) - \phi(\mathbf{p}^{(n)} + \Delta\mathbf{p})}{\phi(\mathbf{p}^{(n)}) - \tilde{\phi}(\Delta\mathbf{p})}, \quad (5.25)$$

où le numérateur représente la variation effective de la fonction de coût tandis que le dénominateur représente la variation prédite par le modèle linéaire (5.19). Une grande valeur de ρ indique ainsi que $\tilde{\phi}(\Delta\mathbf{p})$ est une bonne approximation de $\phi(\mathbf{p}^{(n)} + \Delta\mathbf{p})$, et on peut diminuer λ pour accorder plus de confiance à l'approximation linéaire lors de l'itération suivante, de manière à être plus proche d'une mise à jour de Gauss-Newton. Si ρ est petit (voire même négatif), alors $\tilde{\phi}(\Delta\mathbf{p})$ est une mauvaise approximation et on augmente λ .

La matrice $(\mathbf{J}^H \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I}_F)$ étant définie positive, on peut résoudre (5.24) rapidement en utilisant sa décomposition de Cholesky.

L'algorithme 8 donne les étapes principales de la méthode de Levenberg-Marquardt.

Nous allons maintenant donner les expressions de $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{M \times F}$ et de $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^{F \times 1}$ pour les différents modèles multilinéaires. Etant donné la structure partitionnée de $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{F \times 1}$ de l'équation (5.14),

Algorithme 8 : *Algorithme de Levenberg-Marquardt*

```

Initialize  $\mathbf{p}$ , set  $n = 1$ 
while  $\|\mathcal{Y}^{(n)} - \mathcal{Y}^{(n-1)}\|_F \geq \epsilon$  (e.g.  $\epsilon = 10^{-5}$ ) do
  - Calculate  $\mathbf{J}^H \mathbf{J}$  and  $\mathbf{g}$ 
  - Solve  $(\mathbf{J}^H \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I}) \Delta \mathbf{p} = -\mathbf{g}$  to find  $\Delta \mathbf{p}$ 
  - Update  $\mathbf{p}$  :  $\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(n)} + \Delta \mathbf{p}$ 
  - Update  $\lambda$  taking into account the gain ratio  $\rho$ 
  -  $n \leftarrow n + 1$ 
end

```

le Jacobien de l'équation (5.18) peut s'écrire $\mathbf{J} = [\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}} | \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}} | \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}}]$, où $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}} = \mathbf{J}(\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{A}}})$, $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}} = \mathbf{J}(\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{H}}})$ et $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}} = \mathbf{J}(\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{S}}})$.

La résolution de (5.24) nécessite donc la construction de la matrice $\mathbf{J}^H \mathbf{J} \in \mathbb{C}^{F \times F}$:

$$\mathbf{J}^H \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}} & \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}} & \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}} \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}} & \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}} & \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}} \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}} & \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}} & \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}} \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

5.4.2 Application à la décomposition PARAFAC

Pour cette décomposition, les matrices inconnues sont $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times R}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times R}$ et $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times R}$. Le nombre d'inconnues est donc $F = R(I + J + K)$. En réalité, étant donné l'ambiguïté propre à ce modèle, on pourrait par exemple fixer de manière arbitraire le premier élément dans chaque colonne de \mathbf{H} et de \mathbf{A} , dans la mesure où les premiers éléments de chaque colonne de \mathbf{S} compensent ce choix. Ainsi, le nombre réel d'inconnues est $\tilde{F} = R(I + J + K) - 2R$, si bien que le Jacobien \mathbf{J} a au moins $2R$ valeurs singulières nulles.

5.4.2.1 Construction du Jacobien

Etant données les matrices estimées $\hat{\mathbf{H}}$, $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{S}}$, on peut écrire le tenseur estimé $\hat{\mathcal{Y}}$ sous les formes matricielles et vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{Y}}_{IK \times J} = (\hat{\mathbf{H}} \odot \hat{\mathbf{A}}) \cdot \hat{\mathbf{S}}^T \\ \hat{\mathbf{Y}}_{JI \times K} = (\hat{\mathbf{S}} \odot \hat{\mathbf{H}}) \cdot \hat{\mathbf{A}}^T \\ \hat{\mathbf{Y}}_{KJ \times I} = (\hat{\mathbf{A}} \odot \hat{\mathbf{S}}) \cdot \hat{\mathbf{H}}^T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{Y}}_{JIK} = (\mathbf{I}_J \otimes (\hat{\mathbf{H}} \odot \hat{\mathbf{A}})) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{S}}} \\ \hat{\mathbf{Y}}_{KJI} = (\mathbf{I}_K \otimes (\hat{\mathbf{S}} \odot \hat{\mathbf{H}})) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{A}}} \\ \hat{\mathbf{Y}}_{IKJ} = (\mathbf{I}_I \otimes (\hat{\mathbf{A}} \odot \hat{\mathbf{S}})) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{H}}} \end{cases}, \quad (5.27)$$

où $\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{A}}} \in \mathbb{C}^{KR \times 1}$, $\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{H}}} \in \mathbb{C}^{IR \times 1}$ et $\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{S}}} \in \mathbb{C}^{JR \times 1}$. Nous rappelons que l'ordre des indices a une importance. En posant $M = KJI$, on obtient

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}} = \mathbf{\Pi}_1 \cdot (\mathbf{I}_J \otimes (\hat{\mathbf{H}} \odot \hat{\mathbf{A}})) \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}} = \mathbf{I}_K \otimes (\hat{\mathbf{S}} \odot \hat{\mathbf{H}}) \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}} = \mathbf{\Pi}_2 \cdot (\mathbf{I}_I \otimes (\hat{\mathbf{A}} \odot \hat{\mathbf{S}})) \end{cases},$$

où $\mathbf{\Pi}_1 \in \mathbb{C}^{KJI \times JIK}$ et $\mathbf{\Pi}_2 \in \mathbb{C}^{KJI \times IKJ}$ sont des matrices de permutation, et $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}} \in \mathbb{C}^{KJI \times JR}$, $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}} \in \mathbb{C}^{KJI \times KR}$ et $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}} \in \mathbb{C}^{KJI \times IR}$.

Nous utilisons ensuite les 2 propriétés suivantes pour simplifier l'écriture de $\mathbf{J}^H \mathbf{J}$:

$$(a) (\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{Q})^H \cdot (\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{Q}) = \mathbf{I}_K \otimes (\mathbf{Q}^H \cdot \mathbf{Q})$$

$$(b) (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^H \cdot (\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) = (\mathbf{A}^H \mathbf{A}) * (\mathbf{B}^H \mathbf{B}), \text{ où nous rappelons que } * \text{ est le produit d'Hadamard.}$$

La combinaison de ces propriétés, ainsi que de $\mathbf{\Pi}_1^T \cdot \mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{\Pi}_2^T \cdot \mathbf{\Pi}_2 = \mathbf{I}_{KJI}$, nous permet d'obtenir les expressions suivantes pour les blocs diagonaux de $\mathbf{J}^H \mathbf{J}$:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}} &= \mathbf{I}_J \otimes \left((\hat{\mathbf{H}}^H \cdot \hat{\mathbf{H}}) * (\hat{\mathbf{A}}^H \cdot \hat{\mathbf{A}}) \right) \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}} &= \mathbf{I}_K \otimes \left((\hat{\mathbf{S}}^H \cdot \hat{\mathbf{S}}) * (\hat{\mathbf{H}}^H \cdot \hat{\mathbf{H}}) \right) \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}} &= \mathbf{I}_I \otimes \left((\hat{\mathbf{A}}^H \cdot \hat{\mathbf{A}}) * (\hat{\mathbf{S}}^H \cdot \hat{\mathbf{S}}) \right) \end{cases} .$$

Puisque $\mathbf{J}^H \mathbf{J}$ est hermitienne, seule la construction des 3 blocs triangulaires supérieurs ou inférieurs parmi les 6 blocs restants est nécessaire. On a ainsi

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}} &= \left(\mathbf{I}_I \otimes (\hat{\mathbf{A}} \odot \hat{\mathbf{S}}) \right)^H \cdot \mathbf{\Pi}_2^H \cdot \left(\mathbf{I}_K \otimes (\hat{\mathbf{S}} \odot \hat{\mathbf{H}}) \right) \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}} &= \left(\mathbf{I}_J \otimes (\hat{\mathbf{H}} \odot \hat{\mathbf{A}}) \right)^H \cdot \mathbf{\Pi}_1^H \cdot \left(\mathbf{I}_K \otimes (\hat{\mathbf{S}} \odot \hat{\mathbf{H}}) \right) \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}} &= \left(\mathbf{I}_J \otimes (\hat{\mathbf{H}} \odot \hat{\mathbf{A}}) \right)^H \cdot \mathbf{\Pi}_1^H \cdot \mathbf{\Pi}_2 \cdot \left(\mathbf{I}_I \otimes (\hat{\mathbf{A}} \odot \hat{\mathbf{S}}) \right) \end{cases} .$$

5.4.2.2 Construction du gradient

Nous allons expliciter la structure de $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^{F \times 1}$, qui est le gradient de ϕ en $\mathbf{p}^{(n)}$. Etant donné

la structure partitionnée de \mathbf{p} , on peut écrire $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\hat{\mathbf{A}}} \\ \mathbf{g}_{\hat{\mathbf{H}}} \\ \mathbf{g}_{\hat{\mathbf{S}}} \end{bmatrix}$, où $\mathbf{g}_{\hat{\mathbf{A}}} = \phi'(\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{A}}})$, $\mathbf{g}_{\hat{\mathbf{H}}} = \phi'(\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{H}}})$ et

$\mathbf{g}_{\hat{\mathbf{S}}} = \phi'(\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{S}}})$.

Pour calculer ces 3 composantes de \mathbf{g} , nous partons des expressions du système (5.27). On peut ainsi écrire la fonction de coût sous les 3 formes suivantes

$$\begin{cases} \phi &= \frac{1}{2} \|Y_{JIK} - \mathbf{I}_J \otimes (\hat{\mathbf{H}} \odot \hat{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{S}}}\|_F^2 \\ \phi &= \frac{1}{2} \|Y_{KJI} - \mathbf{I}_K \otimes (\hat{\mathbf{S}} \odot \hat{\mathbf{H}}) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{A}}}\|_F^2 \\ \phi &= \frac{1}{2} \|Y_{IKJ} - \mathbf{I}_I \otimes (\hat{\mathbf{A}} \odot \hat{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{H}}}\|_F^2 \end{cases} . \quad (5.28)$$

Nous rappelons que pour tout vecteur \mathbf{u} , on a $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^H \cdot \mathbf{u}$. La première équation du système (5.28) peut donc se réécrire

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{S}}}^H \cdot \left(\mathbf{I}_J \otimes (\hat{\mathbf{H}} \odot \hat{\mathbf{A}}) \right)^H \cdot \left(\mathbf{I}_J \otimes (\hat{\mathbf{H}} \odot \hat{\mathbf{A}}) \right) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{S}}} \\ &\quad - \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{S}}}^H \cdot \left(\mathbf{I}_J \otimes (\hat{\mathbf{H}} \odot \hat{\mathbf{A}}) \right)^H \cdot Y_{JIK} \\ &\quad + \frac{1}{2} Y_{JIK}^H \cdot Y_{JIK}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\mathbf{g}_{\hat{\mathbf{S}}} = \mathbf{I}_J \otimes \left((\hat{\mathbf{H}}^H \cdot \hat{\mathbf{H}}) * (\hat{\mathbf{A}}^H \cdot \hat{\mathbf{A}}) \right) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{S}}} - \left(\mathbf{I}_J \otimes (\hat{\mathbf{H}} \odot \hat{\mathbf{A}}) \right)^H \cdot Y_{JIK}. \quad (5.29)$$

De même, on montre que

$$\mathbf{g}_{\hat{\mathbf{A}}} = \mathbf{I}_K \otimes \left((\hat{\mathbf{S}}^H \cdot \hat{\mathbf{S}}) * (\hat{\mathbf{H}}^H \cdot \hat{\mathbf{H}}) \right) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{A}}} - \left(\mathbf{I}_K \otimes (\hat{\mathbf{S}} \odot \hat{\mathbf{H}}) \right)^H \cdot Y_{KJI}, \quad (5.30)$$

$$\mathbf{g}_{\hat{\mathbf{H}}} = \mathbf{I}_I \otimes \left((\hat{\mathbf{A}}^H \cdot \hat{\mathbf{A}}) * (\hat{\mathbf{S}}^H \cdot \hat{\mathbf{S}}) \right) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{H}}} - \left(\mathbf{I}_I \otimes (\hat{\mathbf{A}} \odot \hat{\mathbf{S}}) \right)^H \cdot Y_{IKJ}. \quad (5.31)$$

5.4.3 Application au calcul du BCM-(L,L,1)

Nous allons maintenant donner les structures du Jacobien et du gradient pour le BCM-(L,L,1). La démarche est la même que pour PARAFAC. Cependant, étant donné la structure Toeplitz des matrices \mathbf{S}_r , c'est la mise à jour des vecteurs générateurs qui nous intéresse.

Pour cette décomposition, les matrices estimées sont $\hat{\mathbf{H}} \in \mathbb{C}^{I \times RL}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{K \times R}$ et $\hat{\mathbf{S}} \in \mathbb{C}^{J \times RL}$. Nous rappelons d'après (5.2) que le vecteur générateur de $\hat{\mathbf{S}}$, noté $\hat{\mathbf{s}}$ est de taille $R(J+L-1)$. Le nombre d'inconnues est donc $F = R(IL + K + J + L - 1)$ et correspond à la longueur du vecteur \mathbf{p} .

En réalité, étant donnée l'ambiguïté propre à ce modèle, le nombre réel d'inconnues est inférieur à F . Comme mentionné dans la section 5.2.2, l'indétermination sur chaque matrice Toeplitz $\hat{\mathbf{S}}_r$ se réduit à un scalaire complexe. On pourrait donc par exemple fixer arbitrairement un élément de chacune de ces matrices. De plus, on pourrait également fixer arbitrairement un élément de chaque vecteur $\hat{\mathbf{a}}_r$. Ainsi, le nombre réel d'inconnues est $\tilde{F} = F - 2R$, si bien que le Jacobien \mathbf{J} a au moins $2R$ valeurs singulières nulles, ce qui justifie l'utilisation de l'algorithme de Levenberg-Marquardt plutôt que celle de l'algorithme de Gauss-Newton.

5.4.3.1 Construction du Jacobien

Comme précédemment, étant données les matrices estimées $\hat{\mathbf{H}}$, $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{S}}$, on peut écrire le tenseur estimé $\hat{\mathcal{Y}}$ sous les formes matricielles et vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{Y}}_{IK \times J} &= (\hat{\mathbf{H}} \odot_R \hat{\mathbf{A}}) \cdot \hat{\mathbf{S}}^T \\ \hat{\mathbf{Y}}_{JI \times K} &= [\text{vec}(\hat{\mathbf{H}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_1^T) \dots \text{vec}(\hat{\mathbf{H}}_R \cdot \hat{\mathbf{S}}_R^T)] \cdot \hat{\mathbf{A}}^T \\ \hat{\mathbf{Y}}_{KJ \times I} &= (\hat{\mathbf{A}} \odot_R \hat{\mathbf{S}}) \cdot \hat{\mathbf{H}}^T \end{cases} \quad (5.32)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{Y}}_{JIK} &= \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{s}} \\ \hat{\mathbf{Y}}_{KJI} &= \left(\mathbf{I}_K \otimes [\text{vec}(\hat{\mathbf{H}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_1^T) \dots \text{vec}(\hat{\mathbf{H}}_R \cdot \hat{\mathbf{S}}_R^T)] \right) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{A}}} , \\ \hat{\mathbf{Y}}_{IKJ} &= \left(\mathbf{I}_I \otimes (\hat{\mathbf{A}} \odot_R \hat{\mathbf{S}}) \right) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{H}}} \end{cases} \quad (5.33)$$

où $\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{A}}} \in \mathbb{C}^{KR \times 1}$, $\mathbf{p}_{\hat{\mathbf{H}}} \in \mathbb{C}^{IRL \times 1}$ et $\hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{C}^{R(J+L-1) \times 1}$ et où la matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{JIK \times R(J+L-1)}$ a été définie par l'équation 5.2. Posons $M = KJI$, et écrivons de manière plus compacte

$$[\text{vec}(\hat{\mathbf{H}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_1^T) \dots \text{vec}(\hat{\mathbf{H}}_R \cdot \hat{\mathbf{S}}_R^T)] = (\hat{\mathbf{S}} \odot_R \hat{\mathbf{H}}) \cdot \Psi,$$

où $\Psi = (\mathbf{I}_R \otimes \text{vec}(\mathbf{I}_L))$. On peut alors montrer que les blocs de $\mathbf{J}^H \mathbf{J}$ s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}} &= \mathbf{M}^H \cdot \mathbf{M} \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}} &= \mathbf{I}_K \otimes \left(\Psi^H \cdot (\hat{\mathbf{S}} \odot_R \hat{\mathbf{H}})^H \cdot (\hat{\mathbf{S}} \odot_R \hat{\mathbf{H}}) \cdot \Psi \right), \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}} &= \mathbf{I}_I \otimes \left((\hat{\mathbf{A}} \odot_R \hat{\mathbf{S}})^H \cdot (\hat{\mathbf{A}} \odot_R \hat{\mathbf{S}}) \right) \end{cases}, \quad (5.34)$$

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}} &= \left(\mathbf{I}_I \otimes (\hat{\mathbf{A}} \odot_R \hat{\mathbf{S}}) \right)^H \cdot \Pi_2^H \cdot \left(\mathbf{I}_K \otimes \left((\hat{\mathbf{S}} \odot_R \hat{\mathbf{H}}) \cdot \Psi \right) \right) \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{A}}} &= \mathbf{M}^H \cdot \Pi_1^H \cdot \left(\mathbf{I}_K \otimes \left((\hat{\mathbf{S}} \odot_R \hat{\mathbf{H}}) \cdot \Psi \right) \right) \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{S}}}^H \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{H}}} &= \mathbf{M}^H \cdot \Pi_1^H \cdot \Pi_2 \cdot \left(\mathbf{I}_I \otimes (\hat{\mathbf{A}} \odot_R \hat{\mathbf{S}}) \right) \end{cases}. \quad (5.35)$$

5.4.3.2 Construction du gradient

Considérons les 3 expressions suivantes de la fonction de coût :

$$\begin{cases} \phi &= \frac{1}{2} \|Y_{JIK} - \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{s}}\|_F^2 \\ \phi &= \frac{1}{2} \|Y_{KJI} - \left(\mathbf{I}_K \otimes \left((\hat{\mathbf{S}} \odot_R \hat{\mathbf{H}}) \cdot \Psi \right) \right) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{A}}}\|_F^2 \\ \phi &= \frac{1}{2} \|Y_{IKJ} - \mathbf{I}_I \otimes (\hat{\mathbf{A}} \odot_R \hat{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{H}}}\|_F^2 \end{cases}. \quad (5.36)$$

On peut alors montrer que

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{\hat{\mathbf{s}}} &= \mathbf{M}^H \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{s}} - \mathbf{M}^H \cdot Y_{JIK} \\ \mathbf{g}_{\hat{\mathbf{A}}} &= \mathbf{I}_K \otimes \left(\Psi^H \cdot (\hat{\mathbf{S}} \odot_R \hat{\mathbf{H}})^H \cdot (\hat{\mathbf{S}} \odot_R \hat{\mathbf{H}}) \cdot \Psi \right) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{A}}} - \left(\mathbf{I}_K \otimes \left((\hat{\mathbf{S}} \odot_R \hat{\mathbf{H}}) \cdot \Psi \right) \right)^H \cdot Y_{KJI} \\ \mathbf{g}_{\hat{\mathbf{H}}} &= \mathbf{I}_I \otimes \left((\hat{\mathbf{A}} \odot_R \hat{\mathbf{S}})^H \cdot (\hat{\mathbf{A}} \odot_R \hat{\mathbf{S}}) \right) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{H}}} - \left(\mathbf{I}_I \otimes (\hat{\mathbf{A}} \odot_R \hat{\mathbf{S}}) \right)^H \cdot Y_{IKJ} \end{cases}$$

5.4.4 Application au calcul du BCM-(L,P,..)

De même que dans le paragraphe précédent, c'est la mise à jour des vecteurs générateurs des matrices Toeplitz qui nous intéresse. Pour le BCM-(L,P,..), les matrices estimées sont $\hat{\mathbf{H}} \in \mathbb{C}^{I \times RLP}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{K \times RP}$ et $\hat{\mathbf{S}} \in \mathbb{C}^{J \times RL}$, et rappelons d'après (5.3) que le vecteur générateur de $\hat{\mathbf{S}}$, noté $\hat{\mathbf{s}}$, est de taille $R(J+L-1)$. Le nombre d'inconnues est donc $F = R(ILP + KP + J + L - 1)$. En réalité, étant donné l'ambiguïté propre à ce modèle, le nombre réel d'inconnues est inférieur à F . Comme mentionné dans la section 5.2.3, l'indétermination sur chaque matrice Toeplitz $\hat{\mathbf{S}}_r$ se réduit à un scalaire complexe. On pourrait donc par exemple fixer arbitrairement un élément de chacune de ces matrices. De plus, on pourrait également fixer arbitrairement les éléments d'un bloc de taille $P \times P$ de chaque matrice $\hat{\mathbf{A}}_r \in \mathbb{C}^{K \times P}$, si $K \geq P$, étant donné qu'on peut compenser ce choix par la matrice d'indétermination dans cette dimension. Ainsi, le nombre réel d'inconnues est $\tilde{F} = F - R(P^2 + 1)$, si bien que le Jacobien \mathbf{J} a au moins $R(P^2 + 1)$ valeurs singulières nulles.

Les représentations matricielles du tenseur estimé $\hat{\mathcal{Y}}$ données dans la section 5.2.3 nous permettent de déduire les représentations vectorielles équivalentes :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{Y}}_{IK \times J} = [(\hat{\mathcal{H}}_1 \bullet_3 \hat{\mathbf{A}}_1)_{IK \times L} \dots (\hat{\mathcal{H}}_R \bullet_3 \hat{\mathbf{A}}_R)_{IK \times L}] \cdot \hat{\mathbf{S}}^T \\ \hat{\mathbf{Y}}_{JI \times K} = [(\hat{\mathcal{H}}_1 \bullet_2 \hat{\mathbf{S}}_1)_{JI \times P} \dots (\hat{\mathcal{H}}_R \bullet_2 \hat{\mathbf{S}}_R)_{JI \times P}] \cdot \hat{\mathbf{A}}^T \\ \hat{\mathbf{Y}}_{KJ \times I} = (\hat{\mathbf{A}} \odot_R \hat{\mathbf{S}}) \cdot \hat{\mathbf{H}}^T \end{cases} \quad (5.37)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{Y}}_{JIK} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{s}} \\ \hat{\mathbf{Y}}_{KJI} = (\mathbf{I}_K \otimes [\text{vec}(\hat{\mathbf{H}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_1^T) \dots \text{vec}(\hat{\mathbf{H}}_R \cdot \hat{\mathbf{S}}_R^T)]) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{A}}} \\ \hat{\mathbf{Y}}_{IKJ} = (\mathbf{I}_I \otimes (\hat{\mathbf{A}} \odot_R \hat{\mathbf{S}})) \cdot \mathbf{p}_{\hat{\mathbf{H}}} \end{cases} \quad (5.38)$$

Les expressions de \mathbf{J} , $\mathbf{J}^H \mathbf{J}$ et de \mathbf{g} sont ensuite obtenues en adoptant la démarche des paragraphes précédents.

5.4.5 Illustration des performances

Les figures 5.3(a) et 5.3(b) représentent l'évolution typique de la fonction de coût ϕ , pour les algorithmes ALS standard, ALS+LSB, ALS+LSH, ALS+ELSCS et LM. Pour le problème bien conditionné de la figure 5.3(a), l'algorithme LM permet de réduire considérablement le nombre d'itérations par rapport aux autres techniques. Après quelques itérations pendant lesquelles la fonction de coût diminue lentement (comportement de type descente de gradient), la convergence accélère et devient quasi-quadratique, ce qui est significatif d'un comportement de type Gauss-Newton.

Le gain en nombre d'itérations est encore plus considérable pour le problème mal conditionné de la figure 5.3(b), où l'algorithme LM a convergé en seulement 28 itérations tandis que l'algorithme le plus performant jusqu'à présent (ALS+ELSCS) a nécessité 2.10^3 itérations.

5.5 Compression des données par SVD

Dans cette section, nous montrons comment le tenseur des observations peut être compressé avant d'être décomposé, de manière à réduire le temps de calcul. L'outil utilisé pour la réduction de dimensions de ce tenseur est la SVD. Une fois cette étape de pré-traitement achevée, la décomposition du tenseur réduit obtenu peut être effectuée au moyen de l'un des algorithmes itératifs proposés dans cette section. Enfin, après convergence, les données estimées compressées sont projetées sur l'espace original. Dans l'application considérée ici, nous allons compresser le tenseur des observations $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ dans la dimension 2. Celle-ci représente en effet la diversité temporelle, $J T_s$ étant la durée de la fenêtre d'observation à la réception. On peut donc supposer que J est grand par rapport au facteur d'étalement I et au nombre d'antennes K .

Cette section s'articule en deux paragraphes. Dans le paragraphe 5.5.1, nous montrons que si $J \geq IK$ le tenseur $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ peut être réduit en un tenseur de dimensions $\bar{\mathcal{Y}} \in \mathbb{C}^{I \times IK \times K}$ par une simple SVD. Cette procédure est la même quelle que soit la décomposition tensorielle considérée.

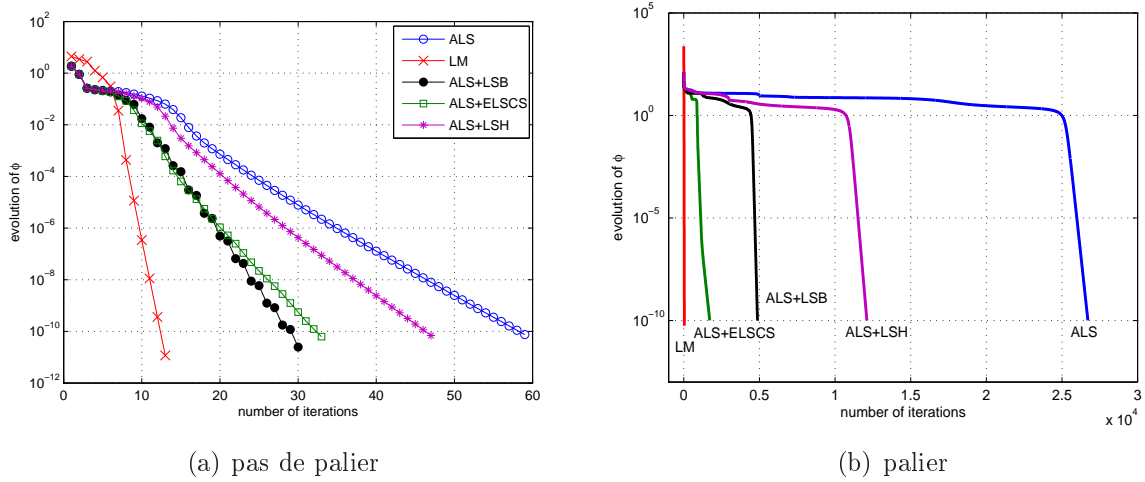


FIG. 5.3 – Convergence typique de l'algorithme de Levenberg-Marquardt

Dans le paragraphe 5.5.2, nous montrons que $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ peut être encore plus compressé que $\bar{\mathcal{Y}} \in \mathbb{C}^{I \times IK \times K}$ si certaines hypothèses sur les dimensions sont vérifiées.

5.5.1 Compression selon la dimension longue

a) PARAFAC

Pour le modèle PARAFAC, \mathcal{Y} peut s'écrire sous la forme d'une matrice de taille $IK \times J$:

$$\mathbf{Y}_{IK \times J} = (\mathbf{H} \odot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S}^T, \quad (5.39)$$

où $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times R}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times R}$ et $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times R}$. Supposons que $J \geq IK \geq R$ et considérons la factorisation suivante $\mathbf{S}^T = \bar{\mathbf{S}}^T \cdot \mathbf{Z}$, où $\bar{\mathbf{S}} \in \mathbb{C}^{IK \times R}$ et $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{IK \times J}$.

Considérons alors la SVD suivante $\mathbf{Y}_{IK \times J} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^H$, où $\mathbf{U} \cdot \mathbf{D}$ est de taille $IK \times IK$ et \mathbf{V}^H de taille $IK \times J$. Si on choisit $\mathbf{Z} = \mathbf{V}^H$, il existe une matrice $\bar{\mathbf{S}}$ vérifiant

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Y}}_{IK \times IK} &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \\ &= (\mathbf{H} \odot \mathbf{A}) \cdot \bar{\mathbf{S}}^T, \end{aligned}$$

où $\bar{\mathbf{Y}}_{IK \times IK} = \mathbf{Y}_{IK \times J} \cdot \mathbf{V}^{-H}$ est une représentation matricielle du tenseur réduit $\bar{\mathcal{Y}} \in \mathbb{C}^{I \times IK \times K}$. Ceci peut aussi s'écrire sous la forme tensorielle $\mathcal{Y} = \bar{\mathcal{Y}} \bullet_2 \mathbf{V}^H$. On peut ensuite chercher la décomposition PARAFAC du tenseur réduit $\bar{\mathcal{Y}}$ avec l'un des algorithmes itératifs proposés dans ce chapitre, afin d'estimer \mathbf{H} , \mathbf{A} et $\bar{\mathbf{S}}$. L'étape de compression diminue d'autant plus la quantité de calcul que J est grand devant IK . Enfin, après convergence de l'algorithme dans l'espace compressé, on obtient une estimation de \mathbf{S} par $\mathbf{S}^T = \bar{\mathbf{S}}^T \cdot \mathbf{Z}$.

b) BCM-(L,L,1)

Le principe est le même pour la décomposition en termes de rang-(L,L,1). Soit $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$, et supposons $J \geq IK \geq RL$. Considérons la représentation matricielle suivante de \mathcal{Y} :

$$\mathbf{Y}_{IK \times J} = (\mathbf{H} \odot_R \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S}^T, \quad (5.40)$$

où $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times RL}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times R}$ et $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times RL}$. Comme précédemment, on peut chercher la décomposition en termes de rang-(L,L,1) du tenseur réduit $\bar{\mathcal{Y}} \in \mathbb{C}^{I \times IK \times K}$. Notons toutefois que si la matrice \mathbf{S} des données était Toeplitz, la matrice $\bar{\mathbf{S}} \in \mathbb{C}^{IK \times RL}$ n'a plus cette structure et après retour dans l'espace de départ, la matrice estimée $\hat{\mathbf{S}}$ n'est pas Toeplitz. Pour $r = 1 \dots R$, il existe en effet une matrice d'indétermination propre au modèle $\mathbf{F}_r \in \mathbb{C}^{R \times R}$ (cf Section 3.3.2) telle que $\hat{\mathbf{S}}_r = \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{F}_r$ si le modèle est exact ou $\hat{\mathbf{S}}_r = \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{F}_r + \mathbf{R}_{sr}$ si le modèle est bruité, où \mathbf{R}_{sr} représente le résidu sur la matrice \mathbf{S}_r . On peut alors soit trouver la matrice \mathbf{F}_r au sens du maximum de vraisemblance telle que $\hat{\mathbf{S}}_r$ ait une structure Toeplitz [8], soit faire quelques itérations dans l'espace de départ avec un algorithme qui impose la structure Toeplitz à chaque itération.

c) BCM-(L,P,.)

De même pour la décomposition de \mathcal{Y} en termes de rang-(L,P,.). Supposons que $J \geq IK \geq RL$ et considérons la représentation matricielle suivante de \mathcal{Y} :

$$\mathbf{Y}_{IK \times J} = [(\mathcal{H}_1 \bullet_3 \mathbf{A}_1)_{IK \times L} \dots (\mathcal{H}_R \bullet_3 \mathbf{A}_R)_{IK \times L}] \cdot \mathbf{S}^T, \quad (5.41)$$

où $\mathcal{H}_r \in \mathbb{C}^{I \times L \times P}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times RP}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times RL}$. On peut chercher la décomposition en termes de rang-(L,P,.) du tenseur réduit $\bar{\mathcal{Y}} \in \mathbb{C}^{I \times IK \times K}$. Les remarques de la section précédente concernant la structure Toeplitz s'appliquent également à ce modèle.

5.5.2 Compression selon le rang

Dans ce paragraphe, nous montrons que la connaissance a priori du rang de la matrice $\mathbf{Y}_{IK \times J}$ permet de tronquer la SVD $\mathbf{Y}_{IK \times J} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^H$ de manière à réduire encore plus les dimensions par rapport à la solution du paragraphe précédent.

- Pour le modèle PARAFAC de l'équation (5.39), si $J \geq IK \geq R$, alors le rang générique de $\mathbf{Y}_{IK \times J}$ est R , si bien que l'on peut prendre $\bar{\mathbf{Y}}_{IK \times R} = [\mathbf{U}]_{:,1:R} \cdot [\mathbf{D}]_{1:R,1:R}$ et calculer la décomposition du tenseur réduit $\bar{\mathcal{Y}} \in \mathbb{C}^{I \times R \times K}$.
- Pour les modèle BCM-(L,L,1) et BCM-(L,P,.), si $J \geq IK \geq RL$, alors le rang générique de $\mathbf{Y}_{IK \times J}$ est RL , si bien que l'on peut prendre $\bar{\mathbf{Y}}_{IK \times RL} = [\mathbf{U}]_{:,1:RL} \cdot [\mathbf{D}]_{1:RL,1:RL}$ et calculer la décomposition du tenseur réduit $\bar{\mathcal{Y}} \in \mathbb{C}^{I \times RL \times K}$.

Remarque : lorsque les dimensions le permettent, on peut de la même manière effectuer une compression des données simultanément dans plusieurs modes de manière à réduire plusieurs dimensions du tenseur initial.

La figure 5.4 représente l'évolution du temps par itération pour les algorithmes ALS (en bleu), ALS+ELSCS (en vert) et LM (en rouge), avec ou sans compression, en fonction du nombre de symboles J collectés. La figure de gauche a été obtenue pour le modèle PARAFAC avec $I = 8$, $K = 6$, $R = 6$ et celle de droite pour le modèle BCM-(L,P,.) avec $I = 8$, $K = 4$, $L = P = 2$

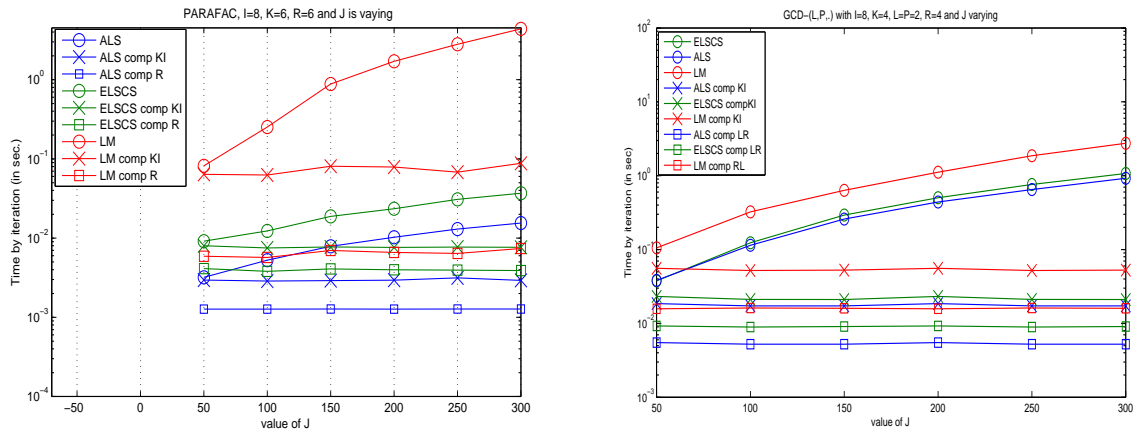


FIG. 5.4 – Illustration du temps de calcul par itération avec ou sans compression

et $R = 4$. Toutes les matrices ont été générées aléatoirement avec des éléments complexes dont les parties réelles et imaginaires suivent une distribution gaussienne.

Sur les deux figures, un marqueur circulaire sur les courbes indique qu'aucune compression n'a été effectuée sur le tenseur des données avant le calcul de sa décomposition. Une croix indique une compression selon la dimension longue (la dimension du nombre de symboles J devient une dimension de longueur KI) et un carré indique une compression selon le rang (J remplacé par R pour PARAFAC et par LR pour BCM-(L,P,.)).

De manière générale, quel que soit l'algorithme utilisé, une compression selon la dimension longue permet une réduction du temps de calcul par itération d'autant plus importante que la taille des données augmente. La compression selon le rang est encore plus efficace car elle réduit encore plus le temps de calcul. En comparant les algorithmes ALS et ALS+ELSCS, on constate que l'insertion de l'étape de recherche linéaire augmente raisonnablement le temps de calcul par rapport à l'emploi de l'ALS seul. L'algorithme de Levenberg Marquardt est considérablement plus coûteux que l'ALS, pour le modèle PARAFAC. Une analyse plus détaillée (avec le profiler de Matlab) montre que c'est la résolution du système (5.24) qui consomme le plus de temps quand J augmente, ce qui est cohérent car la taille de $\mathbf{J}^H \cdot \mathbf{J}$ augmente avec le nombre d'inconnues. Pour le modèle BCM-(L,P,.), l'écart entre les algorithmes ALS et LM est moins important. Notons que c'est la version de l'ALS qui préserve la structure Toeplitz que nous avons testé ici (algorithme 5). Une analyse plus détaillée montre que c'est l'étape de mise à jour du vecteur générateur des matrices Toeplitz, c'est à dire la résolution de (5.3) qui est la plus coûteuse.

Grâce à la compression, on peut ramener le temps de calcul par itération de chaque algorithme à un niveau comparable. Cependant, comme nous l'avons noté précédemment, la compression engendre une perte de la structure Toeplitz, si bien qu'il faut effectuer un traitement à posteriori pour retrouver cette structure au sens du maximum de vraisemblance afin de réaliser l'égalisation.

Bien que les algorithmes ALS+ELSCS et LM aient un coût de calcul par itération plus élevé que l'ALS, le nombre d'itérations qu'ils requièrent pour converger vers le même point est grandement

inférieur à l'ALS dans de nombreux problèmes.

Dans la section suivante, nous allons effectuer une analyse plus complète du comportement de ces algorithmes.

5.6 Simulations sur des données non bruitées

Dans cette section, nous considérons que le tenseur des observations est non bruité, c'est à dire que sa décomposition selon le modèle à partir duquel il a été construit est exacte. Si la condition d'unicité est respectée, la fonction de coût a donc pour valeur $\phi = 0$ lorsque le minimum global est atteint car la norme des résidus est nulle en ce point. Nous allons illustrer le comportement des différents algorithmes proposés afin de mettre en évidence l'impact de plusieurs facteurs sur leurs performances respectives. Le modèle choisi pour présenter les résultats de cette section est le BCM-(L,P,.). Cependant, les mêmes expériences avec les modèles moins complexes PARAFAC et BCM-(L,L,1) donnent des résultats similaires. En effet, les algorithmes testés présentent des caractéristiques qui leur sont propres, et ce indépendamment du modèle algébrique considéré.

5.6.1 Critère d'arrêt

Soit le tenseur des observations non bruitées $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ et soit $\hat{\mathcal{Y}}^{(n)}$ son estimation à l'itération n . Puisque le modèle est exact, il existe un nombre n tel que $\phi^{(n)} = \frac{1}{2} \|\mathcal{Y} - \hat{\mathcal{Y}}^{(n)}\|_F^2 < \epsilon$, où ϵ est un seuil à partir duquel on considère que le minimum global a été atteint, par exemple $\epsilon = 10^{-5}$.

On peut définir plusieurs critères d'arrêt pour les algorithmes itératifs que nous allons comparer.

Critère 1 : arrêter l'algorithme si $\phi^{(n)} < \epsilon$. Critère uniquement valable si la décomposition est exacte (données non bruitées).

Cependant, si le tenseur \mathcal{Y} est bruité, on doit définir d'autres critères d'arrêt comme :

Critère 2 : arrêter l'algorithme si $|\phi^{(n)} - \phi^{(n-1)}| < \epsilon$.

ou

Critère 3 : arrêter l'algorithme si $\|\hat{\mathcal{Y}}^{(n)} - \hat{\mathcal{Y}}^{(n-1)}\|_F^2 < \epsilon$.

Lorsque les données sont non bruitées et si la décomposition est unique, la norme des résidus est nulle lorsque le minimum global est atteint, et c'est l'interprétation du critère 1. Toutefois, lorsqu'un palier est rencontré, $\phi^{(n)}$ stagne si bien que le critère 1 peut ne pas être satisfait dans un délai de temps raisonnable. C'est pourquoi ce critère est en général couplé à un autre critère qui permet d'éviter les cas extrêmes. On peut par exemple fixer un nombre d'itérations maximum, ou un temps maximum autorisé pour atteindre le minimum global.

Lorsque les données sont bruitées, la norme des résidus n'est pas nulle lorsque le minimum global de ϕ est atteint. Le critère 1 ne peut donc pas être employé. Dans ce cas, nous utilisons le critère 2 ou le critère 3 (qui peuvent également être choisis pour des données non bruitées). Puisque ces critères se basent sur une mesure de la quantité de correction entre deux itérations successives, on peut distinguer deux cas :

i) soit l'algorithme a atteint son minimum global si bien que cette quantité n'évolue plus,

ii) soit l'algorithme traverse un palier si bien que la probabilité qu'il s'arrête sur un point de ce palier sans pouvoir atteindre le minimum global n'est pas négligeable.

Le cas ii) est particulièrement problématique. Certes, si les données sont non bruitées on peut aisément faire la distinction entre i) et ii) en calculant la norme finale des résidus. Cependant, si les données sont bruitées, la distinction entre i) et ii) n'est pas aisée car la norme des résidus que l'on doit obtenir lorsque le minimum global est atteint n'est pas connue à priori. Pour augmenter la probabilité de trouver le minimum global avec les critères 2 ou 3, on peut en pratique procéder à plusieurs initialisations.

5.6.2 Impact de l'initialisation

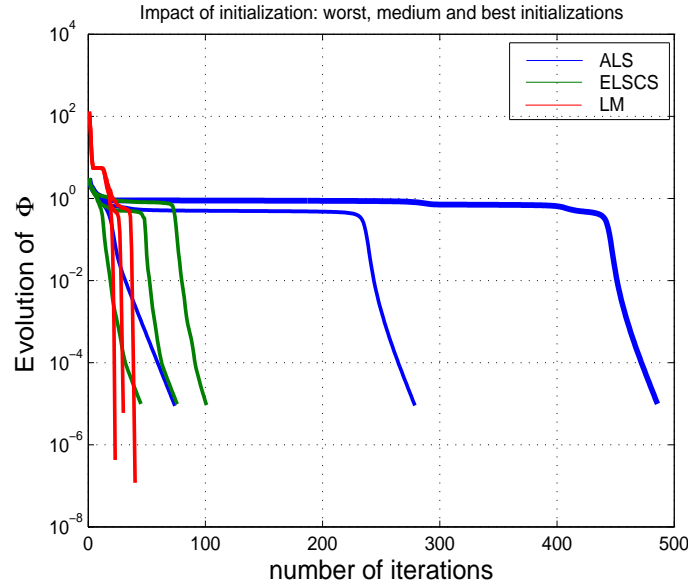
L'initialisation des algorithmes proposés a un impact sur leur vitesse de convergence. Pour illustrer cette remarque, nous avons fait l'expérience suivante : après avoir généré des matrices \mathbf{A} , \mathbf{H} et \mathbf{S} à partir de distribution gaussiennes complexes ainsi que le tenseur non bruité \mathcal{Y} suivant le BCM-(L,P.), nous avons testé chaque algorithme avec 10 initialisations aléatoires et avec le critère d'arrêt 1. Nous avons choisi $I = 8$, $K = 6$, $J = 50$, $R = 6$, $L = 2$, $P = 2$. Notons que dans ce cas, même si $L = P$, la condition $RL \leq \min(J, K)$ n'est pas respectée, si bien que le calcul de la décomposition par EVD proposée dans le chapitre 3 n'est pas possible. Dans la figure 5.5, nous avons reporté l'évolution de la fonction de coût ϕ pour 3 initialisations : la meilleure, la médiane et la moins bonne, le critère de sélection étant le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre $\phi < 10^{-5}$.

L'ALS (en bleu) est très sensible à l'initialisation. La moins bonne d'entre elles a mené à la convergence en 500 itérations environ, après la traversée d'un palier, tandis que 100 itérations ont été nécessaires (sans palier) pour la meilleure. Ce phénomène existe aussi pour l'ALS+ELSCS (en vert) mais avec un impact moindre. Ceci s'explique par l'étape de recherche linéaire qui permet de réduire la longueur des paliers, rendant de ce fait l'algorithme ALS+ELSCS moins sensible à l'initialisation que l'ALS. Enfin, l'algorithme LM (en rouge) est très peu sensible à l'initialisation, ne traverse pas de palier, et offre une vitesse de convergence quadratique dans les itérations finales.

Jusqu'à présent, nous avons évoqué l'existence de problèmes faciles ou difficiles selon la présence ou non de paliers et nous avons montré que l'initialisation peut engendrer des paliers. Nous allons maintenant mettre en évidence un facteur qui implique l'apparition de paliers : le conditionnement des données.

5.6.3 Impact du conditionnement d'une matrice de données

Le principe même de l'ALS est une mise à jour au sens des moindres carrés des facteurs dans chaque mode, ce qui en fait une technique sensible au conditionnement de ces données. Dans [91, 92], les auteurs ont montré le lien qui existe entre l'apparition de paliers ("swamps") et le conditionnement. D'une part, l'initialisation peut parfois mener à des matrices estimées intermédiaires mal conditionnées, ce qui explique le comportement de l'ALS mis en évidence dans le paragraphe précédent. D'autre part, ces paliers apparaissent également si les données

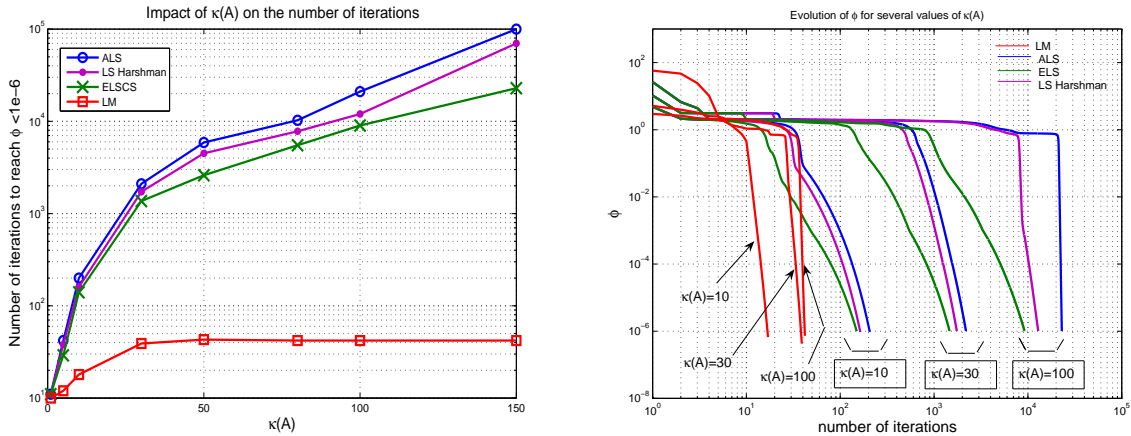
FIG. 5.5 – Evolution typique de ϕ pour 3 initialisations différentes

originales sont elles-mêmes mal conditionnées. C'est ce point particulier que nous allons mettre en évidence dans ce paragraphe.

La figure 5.6 illustre l'effet du conditionnement de la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times RP}$ sur le calcul de la décomposition du BCM-(L,P,..) pour des données non bruitées. Les paramètres choisis sont : code d'étalement de longueur $I = 8$, $J = 50$ symboles collectés, $K = 4$ antennes, $R = 4$ utilisateurs, $L = 2$ symboles interférents pour chaque utilisateur, et $P = 3$ trajets par utilisateur. Nous générons une seule fois les matrices \mathbf{H} et \mathbf{S} puis, pour chaque valeur du conditionnement de \mathbf{A} prise dans l'ensemble $\kappa(\mathbf{A}) = \{1, 5, 10, 30, 50, 80, 100, 150\}$, nous testons les algorithmes ALS, LM, ALS+ELSCS et ALS+LS proposé par Harshman dans [30] (c'est à dire le pas de la Line Search est fixé à $\rho = 1.2$) avec 30 initialisations aléatoires différentes. Le conditionnement de \mathbf{A} est imposé à partir de la SVD d'une matrice \mathbf{A} aléatoire complexe de taille $K \times RP$, $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^H$, après laquelle nous gardons \mathbf{U} et \mathbf{V} tandis $\mathbf{\Sigma}$ est reconstruite de manière à obtenir la valeur désirée de $\kappa(\mathbf{A})$. Puisque le modèle est sans bruit, nous pouvons choisir le critère d'arrêt numéro 1 afin d'examiner à quelle vitesse les algorithmes atteignent $\phi < 10^{-6}$. Nous sélectionnons la meilleure initialisation comme celle menant au minimum global le plus rapidement.

La figure 5.6(a) représente l'évolution du nombre d'itérations correspondant à la meilleure initialisation en fonction de $\kappa(\mathbf{A})$. L'ALS est très sensible au conditionnement de \mathbf{A} puisque le nombre d'itérations varie de 10 à 10^5 lorsque $\kappa(\mathbf{A})$ varie de 1 à 150 . Les algorithmes ALS+LS et ALS+ELSCS sont également très sensibles à la valeur de $\kappa(\mathbf{A})$, même si l'étape de recherche linéaire a permis de réduire le nombre d'itérations par rapport à l'ALS standard. Au contraire, l'algorithme LM demeure très peu sensible au conditionnement.

Ces comportements s'expliquent par la figure 5.6(b), qui représente l'évolution de la fonction de coût ϕ en fonction du nombre d'itérations pour les valeurs $\kappa(\mathbf{A}) = \{10, 30, 100\}$. Il apparaît



(a) Nombre d'itérations pour converger vs. $\kappa(\mathbf{A})$ (b) Evolution de ϕ pour quelques valeurs de $\kappa(\mathbf{A})$

FIG. 5.6 – Impact de $\kappa(\mathbf{A})$ sur le nombre d'itérations

que la vitesse de convergence de l'ALS diminue drastiquement quand $\kappa(\mathbf{A})$ augmente car ϕ doit traverser un palier dont la longueur augmente avec $\kappa(\mathbf{A})$. Les algorithmes ALS+LS et ALS+ELSCS permettent de réduire la longueur de ce palier mais ils restent moins performants que l'algorithme LM. Après quelques pas dans la direction du gradient (ce qui correspond à de larges valeurs de λ dans 5.24), la vitesse de convergence de celui-ci devient quadratique, ce qui est le résultat d'une mise à jour de type Gauss-Newton.

5.6.4 Impact de l'effet Near-Far

On parle d'effet near-far lorsqu'un appareil mobile émet à une puissance trop élevée, qui éblouit tous les autres appareils mobiles du voisinage. Prenons par exemple un appareil mobile émetteur se trouvant au pied de la station de base et d'autres appareils en périphérie. Étant donné que l'atténuation subie par l'onde électromagnétique lors de sa propagation dans l'air est liée à la longueur du trajet parcouru, la puissance reçue du signal de l'utilisateur proche des antennes est supérieure à celle des autres utilisateurs. Ce problème est particulièrement important dans les systèmes CDMA, dans la mesure où les utilisateurs communiquent simultanément dans la même bande passante. Les signaux des utilisateurs contribuent donc plus ou moins fortement au mélange global reçu.

Une solution possible consiste à mettre en place un système de contrôle de puissance. Le système de contrôle rapide en boucle fermée (Closed-loop Power Control) a été retenu pour le W-CDMA. Ce système permet à la station de base de réaliser des estimations régulières (1500 fois par seconde pour chaque mobile) du rapport signal à interférence et de demander à l'appareil mobile concerné de réduire sa puissance d'émission ou de l'augmenter. Le contrôle de puissance permet ainsi à la station de base de recevoir des signaux de même puissance.

Cependant, notre approche étant non-coopérative, nous supposons qu'aucun contrôle de puissance n'est mis en place, si bien que les signaux des utilisateurs sont reçus avec des niveaux de

puissance différents. Pour illustrer l'effet near-far sur des données non bruitées, nous générons le tenseur des observations \mathcal{Y} comme suit

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R \alpha_r \frac{\mathcal{Y}_r}{\|\mathcal{Y}_r\|_F}.$$

\mathcal{Y} résulte donc d'une somme pondérée des contributions normées \mathcal{Y}_r , où le coefficient de pondération α_r permet de simuler l'impact de la contribution \mathcal{Y}_r de l'utilisateur r sur le mélange global. Nous définissons le conditionnement du tenseur \mathcal{Y} , noté $\kappa(\mathcal{Y})$, comme

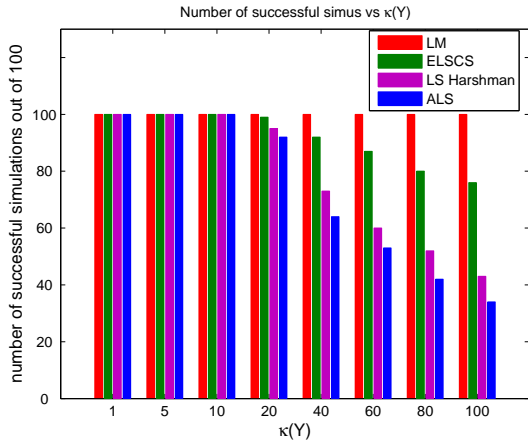
$$\kappa(\mathcal{Y}) = \frac{\max(\alpha_r)}{\min(\alpha_r)}.$$

La figure 5.7 synthétise les résultats de simulations illustrant l'impact de l'effet near-far sur le calcul de la décomposition du BCM-(L,P,..) pour des données non bruitées. Les paramètres choisis sont : code d'étalement de longueur $I = 8$, $J = 50$ symboles collectés, $K = 4$ antennes, $R = 4$ utilisateurs, $L = 2$ symboles interférents pour chaque utilisateur, et $P = 3$ trajets par utilisateur. Les matrices \mathbf{H} et \mathbf{A} ont été générées selon une distribution gaussienne complexe et les symboles de la matrice \mathbf{S} suivent une constellation QPSK.

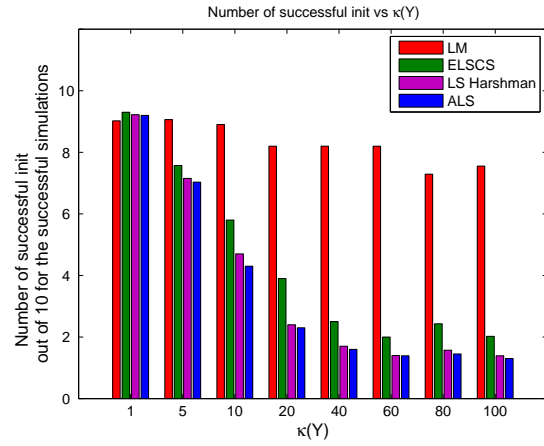
Les valeurs de $\kappa(\mathcal{Y})$ testées sont $[1, 5, 10, 20, 40, 60, 80, 100]$. Pour chaque valeur de $\kappa(\mathcal{Y})$, nous effectuons 100 simulations indépendantes (les données sont reconstruites à chaque simulation). Pour chaque simulation, nous générons 10 initialisations aléatoires différentes. Le critère d'arrêt numéro 2 est choisi et les algorithmes testés sont ALS, LM, ALS+ELSCS ainsi que ALS+LS proposé par Harshman dans [30] (c'est à dire le pas de la Line Search est fixé à $\rho = 1.25$). Nous considérons qu'une simulation est réussie lorsque l'une des 10 initialisations au moins a mené vers le minimum global (c'est à dire $\phi < 10^{-5}$).

La figure 5.7(a) représente le nombre de simulations réussies en fonction de $\kappa(\mathcal{Y})$. Avec un taux de réussite de 100 % pour toutes les valeurs de $\kappa(\mathcal{Y})$, l'algorithme de Levenberg-Marquardt est très peu sensible à l'effet near-far, contrairement à l'ALS, dont le taux de réussite diminue quand $\kappa(\mathcal{Y})$ augmente. Ceci s'explique par l'apparition de paliers, comme dans la figure 5.6(b), dont la longueur augmente avec $\kappa(\mathcal{Y})$. L'insertion de l'étape ELSCS dans l'ALS permet d'améliorer considérablement le taux de réussite par rapport à l'ALS standard et par rapport à l'ALS+LS. La figure 5.7(b) représente le nombre moyen d'initialisations réussies (sur 10 tentées) parmi les simulations réussies. Avec au moins 8 initialisations réussies en moyenne pour toutes les valeurs de $\kappa(\mathcal{Y})$, l'algorithme LM est le moins sensible à l'initialisation. Au contraire, les algorithmes ALS, ALS+ELSCS et ALS+LS voient ce nombre diminuer quand $\kappa(\mathcal{Y})$ augmente.

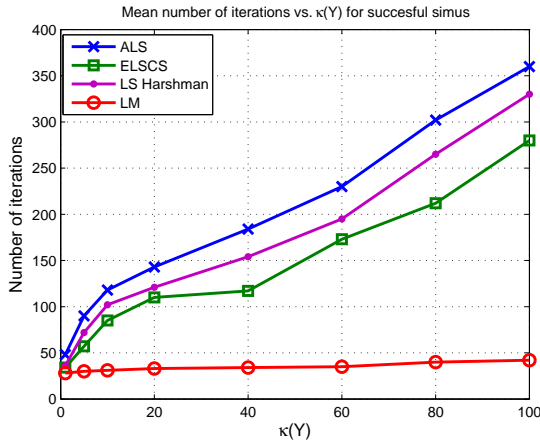
Pour les initialisations réussies sélectionnées, nous avons également relevé le nombre moyen d'itérations et le temps moyen nécessaires pour atteindre le minimum global. Ces résultats sont respectivement représentés par les figures 5.7(c) et 5.7(d). Le nombre d'itérations de l'algorithme LM est approximativement constant quand $\kappa(\mathcal{Y})$ augmente, contrairement aux trois autres algorithmes. Parmi ces derniers, l'ALS+ELSCS offre de meilleures performances que l'ALS+LS car c'est celui qui réduit le plus la longueur des paliers. L'écart existant entre ALS, ALS+ELSCS et ALS+LS en terme du nombre d'itérations se retrouve en terme de temps de calcul sur la figure 5.7(d). Ceci montre que l'insertion de l'étape itérative ELSCS avant l'ALS standard est



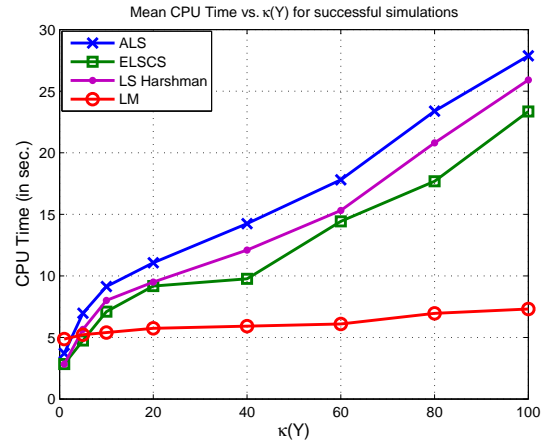
(a) Nombre de simulations réussies sur 100



(b) Nombre d'initialisations réussies parmi les simulations réussies



(c) Nombre moyen d'itérations



(d) Temps Moyen

FIG. 5.7 – Impact de l'effet Near-Far sur des données non bruitées

très peu coûteuse. Pour l'algorithme LM, l'écart se réduit lorsqu'on mesure le temps de calcul car l'itération LM est plus coûteuse que l'itération ALS.

En conclusion de ce paragraphe, il apparaît clairement que l'algorithme LM est le plus robuste à l'effet Near-Far. Il est donc particulièrement approprié à l'extraction de données de faible puissance "noyées" parmi des données de forte puissance.

5.7 Simulations de Monte Carlo sur des données bruitées

Dans la section précédente, nous avons comparé les algorithmes proposés dans ce manuscrit pour l'extraction de données non-bruitées dont le conditionnement varie. Dans cette section, nous allons illustrer la capacité des récepteurs tensoriels aveugles pour l'extraction de données

bruitées. Au moyen de simulations de Monte-Carlo, nous allons donc représenter l'évolution du Taux d'Erreur Binaire (BER pour "Bit Error Rate") en fonction du rapport signal à bruit (SNR pour "Signal to Noise Ratio"). Le critère d'arrêt choisi pour tous les tests de cette section est le numéro 2.

Soit $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ le tenseur des observations non bruitées, suivant l'un des modèles multili-néaires proposés. Nous supposons un bruit blanc additif gaussien (AWGN pour "Additive White Gaussian Noise") dont les échantillons sont contenus dans le tenseur $\mathcal{N} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$. Le tenseur des observations bruitées $\tilde{\mathcal{Y}}$ est généré par

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y} + \mathcal{N},$$

et le SNR est défini par

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\|\mathcal{Y}\|_F^2}{\|\mathcal{N}\|_F^2} \right) \quad [dB],$$

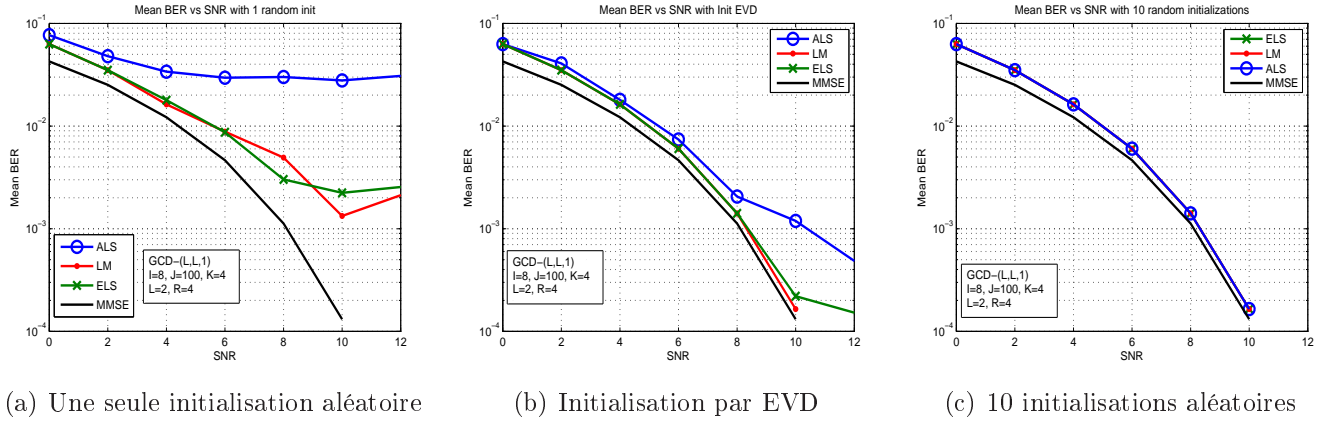
où la variance de \mathcal{N} est calculée de manière à obtenir le SNR choisi.

Puisque l'objectif est de séparer et d'égaliser conjointement les signaux présents dans le mélange, nous avons testé la version des algorithmes qui préserve la structure Toeplitz à chaque itération. Pour toutes les simulations, les matrices \mathbf{H} et \mathbf{A} sont générées aléatoirement selon des distributions gaussiennes complexes et \mathbf{S} est générée aléatoirement avec des symboles QPSK.

5.7.1 Impact de l'initialisation

La figure 5.8 représente les performances du récepteur BCM-(L,L,1), c'est à dire lors d'un scénario de propagation par trajets multiples avec IES et réflexion dans le champ lointain des antennes uniquement. Les valeurs choisies des paramètres sont : facteur d'étalement $I = 8$, $J = 100$ symboles collectés, $K = 4$ antennes, $L = 2$ symboles interférents et $R = 4$ utilisateurs. La figure 5.8(a) illustre l'évolution du BER global (moyenné sur tous les utilisateurs) en fonction du SNR pour les algorithmes aveugles ALS, ALS+ELSCS et LM initialisés *une seule fois de manière aléatoire*. Comme courbe de référence, nous comparons au récepteur non-aveugle MMSE. Celui-ci suppose une parfaite connaissance du canal (matrice \mathbf{H}) et de la réponse des antennes (matrice \mathbf{A}) pour estimer les symboles en une seule étape au sens des moindres carrés. Sur la figure 5.8(b), une seule initialisation a également été utilisée mais celle-ci a été déterminée par la technique EVD proposée dans le chapitre 3. En effet, puisque la condition la condition $RL \leq \min(I, J)$ est vérifiée, cette technique est applicable. Comme l'attestent les performances de la figure 5.8(b), comparativement à celles de la figure 5.8(a), l'initialisation par EVD du BCM-(L,L,1) est bien meilleure car elle exploite le tenseur des observations, contrairement à une initialisation aléatoire.

La figure 5.8(c) représente les résultats obtenus avec 10 initialisations aléatoires. Comparativement à la figure 5.8(a), plusieurs essais avec des initialisations aléatoires différentes ont permis d'améliorer grandement les performances. En effet, pour chaque test de Monte-Carlo, la sélection de la meilleure initialisation parmi les 10 tentées permet l'éviction des minima locaux dans le calcul du BER moyen. Ce procédé est surtout bénéfique à l'ALS, dont la sensibilité à l'initialisation a été illustrée dans la section précédente sur des données non bruitées.

FIG. 5.8 – Impact de l'initialisation sur les performances ($\kappa(\mathcal{Y}) = 1$)

En comparant les figures 5.8(b) et 5.8(c), on constate que les algorithmes LM et ALS+ELSCS ont des performances similaires. Pour l'ALS, quelques initialisations aléatoires seraient bénéfiques, en complément de l'initialisation par EVD.

En conclusion de cette expérience, la technique par EVD permet d'initialiser efficacement les algorithmes itératifs de calcul des décompositions tensorielles. Cependant, nous rappelons que cette technique n'est possible que si certaines contraintes sont respectées sur les dimensions du tenseur des observations. Par exemple, dans le cas du BCM-(L,L,1), la condition $RL \leq \min(I, J)$ implique essentiellement une contrainte sur le facteur d'étalement I , dans la mesure où le nombre de symboles J correspond naturellement à la dimension longue.

5.7.2 Impact de l'effet near-far

La figure 5.9 illustre l'impact de l'effet near-far sur les performances du récepteur aveugle BCM-(L,L,1). Nous avons fixé $I = 4$, $J = 100$, $K = 4$, $L = 2$ et $R = 5$. Sur la figure 5.9(a), l'effet near-far est absent ($\kappa(\mathcal{Y}) = 1$) tandis que sur la figure 5.9(b), il est fixé à $\kappa(\mathcal{Y}) = 5$. Les performances des algorithmes aveugles pour le calcul du BCM-(L,L,1) sont comparées à celles du MMSE et à celles de deux récepteurs semi-aveugles : Sba qui suppose une parfaite connaissance de la réponse des antennes (matrice \mathbf{A} connue), et Sbc qui suppose une parfaite connaissance du canal (matrice \mathbf{H} connue). Ces résultats ont été obtenus à partir de 10 initialisations aléatoires. Sur la figure 5.9(a), les performances du récepteur aveugle basé sur l'algorithme de Levenberg-Marquardt, le plus performant ici, sont relativement proches de celles du MMSE (l'écart est de 3 dB pour $\text{BER}=10^{-2}$). Lorsque $\kappa(\mathcal{Y})$ augmente (Fig. 5.9(b)), cet écart augmente : l'effet near-far pénalise les performances du récepteur aveugle. Notons cependant que l'effet near-far n'est pas la seule difficulté au problème présenté ici. En effet, les valeurs des paramètres sont telles que le système est surchargé ($R > I$) et que le nombre d'utilisateurs ($R = 5$) excède le nombre d'antennes ($K = 4$).

Dans le paragraphe suivant, nous allons illustrer l'impact du nombre d'antennes par rapport au nombre d'utilisateurs,

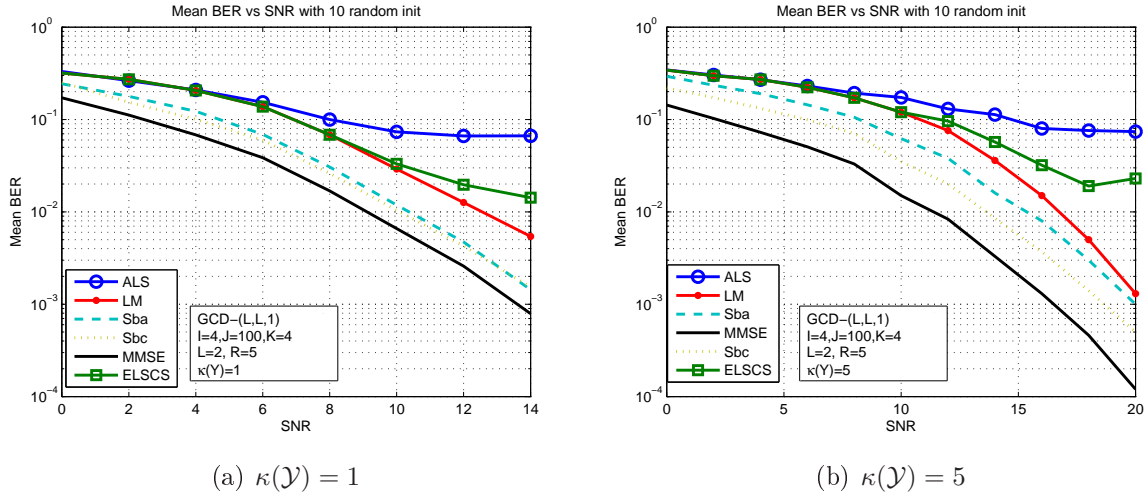


FIG. 5.9 – Impact de l'effet near-far

5.7.3 Impact du nombre d'antennes et d'utilisateurs

La figure 5.10 illustre les performances du récepteur aveugle BCM-(L,P,..) pour un facteur d'étalement de longueur $I = 12$, $J = 100$ symboles, $L = 2$ symboles interférents par utilisateur, $P = 2$ trajets par utilisateur. Sur la figure 5.10(a) le nombre d'antennes est $K = 4$ et le nombre d'utilisateurs $R = 5$, tandis que sur la figure 5.10(b), $K = 6$ et $R = 3$. La comparaison de ces deux figures permet d'illustrer l'impact du facteur $\frac{K}{R}$ qui correspond au nombre d'antennes réceptrices par utilisateur. Lorsque ce facteur augmente, les performances générales du système augmentent, algorithmes aveugles et non-aveugles confondus, et l'écart entre les performances du MMSE non-aveugle et celles des algorithmes aveugles se réduit considérablement. Ces observations montrent l'importance de la diversité spatiale à la réception. Lorsque plusieurs versions d'un même signal sont disponibles à la réception via l'utilisation de plusieurs antennes, les récepteurs tensoriels aveugles que nous proposons exploitent pleinement cette diversité. Celle-ci correspond en effet à l'une des dimensions du tenseur des observations.

5.8 Conclusion

Dans cette section, nous avons proposé trois algorithmes pour le calcul des décompositions tensorielles du chapitre 3. Dans le contexte applicatif du chapitre 4, ces algorithmes permettent de réaliser conjointement la séparation et l'égalisation aveugles de signaux CDMA reçus par un réseau d'antennes.

De manière générale, l'algorithme ALS est très sensible au conditionnement des données, à l'effet near-far et à l'initialisation. Afin d'éviter les minima locaux vers lesquels l'algorithme risque de converger lorsque la fonction de coût rencontre un palier, on peut utiliser plusieurs initialisations aléatoires. Celles-ci permettent un gain de performance considérable, au prix d'un coût calculatoire plus élevé. Lorsque les dimensions le permettent, une initialisation basée sur

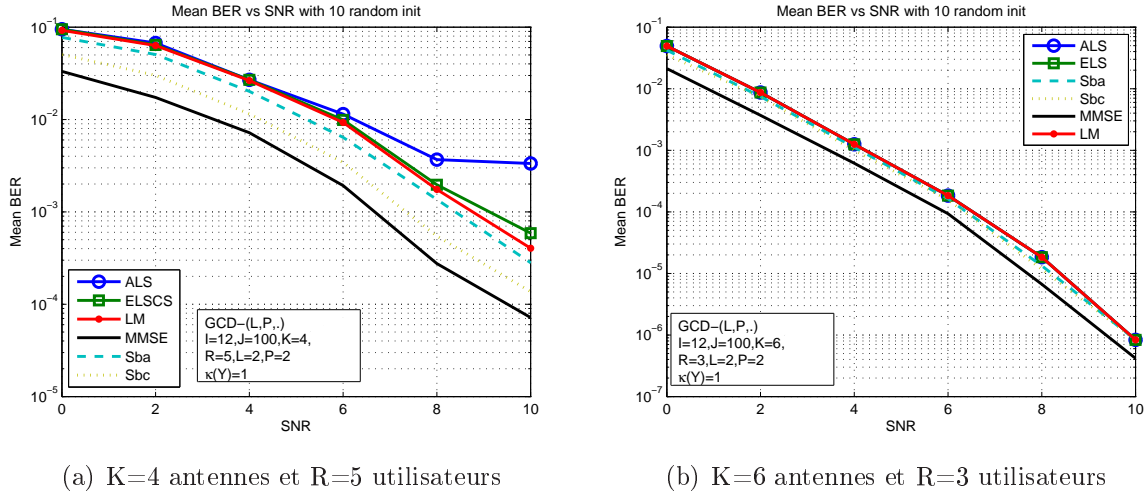


FIG. 5.10 – Impact du nombre d'antennes et d'utilisateurs

une analyse par EVD du tenseur des observations (cf. section 3.6) est bien plus performante qu'une initialisation aléatoire.

L'insertion d'une étape de recherche linéaire optimisée à pas complexe (ELSCS) avant chaque itération de l'ALS améliore considérablement les performances, notamment grâce à la réduction de la taille des paliers. Cette étape consiste à calculer les racines de polynômes de degré 5 et 6. En ce sens, son coût de calcul est faible devant celui de l'itération ALS tandis que le gain en nombre d'itérations est substantiel.

L'algorithme de Levenberg-Marquardt a des propriétés intéressantes par rapport aux algorithmes précédents. Il est peu sensible au conditionnement des données et à l'effet near-far et il offre une convergence quadratique dans les itérations finales. Certes, le coût d'une itération de cet algorithme est plus élevé que pour l'ALS, et son utilisation peut devenir problématique pour des données de grande taille, comme mentionné dans [46] pour la décomposition PARAFAC. Toutefois, la compression préalable du tenseur des données permet de réduire considérablement ce coût de calcul et de le rendre comparable à celui de l'ALS. De plus, le gain significatif en nombre d'itérations de l'algorithme LM compense d'une certaine manière ce coût de calcul plus élevé. Enfin, l'algorithme LM ne nécessite pas autant d'initialisations que l'ALS, ce qui est un avantage non négligeable.

La comparaison entre les récepteurs aveugles proposés et le récepteur non-aveugle MMSE montre que leurs performances respectives sont d'autant plus proches que certains facteurs favorables sont réunis, tels qu'un effet near-far faible ou un nombre suffisant d'antennes réceptrices.

Pour que les récepteurs algébriques multilinéaires proposés aient un sens, la décomposition tensorielle sous-jacente se doit d'être unique. L'unicité des décompositions employées assure en effet l'identifiabilité des contributions de tous les utilisateurs. Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 3, une nouvelle borne d'unicité a récemment été trouvée pour la décomposition PARAFAC, en reformulant celle-ci en terme d'un système de matrices à diagonaliser

conjointement. Dans le chapitre suivant, nous montrons que cette approche permet également de prouver l'existence d'une nouvelle borne d'unicité pour la décomposition du BCM- $(L,L,1)$.

Chapitre 6

Liens entre Décompositions Tensorielles et Diagonalisation Simultanée

6.1 Introduction

La diagonalisation simultanée (SD pour “Simultaneous Diagonalization”) d’un système de matrices est devenue un outil important en traitement du signal depuis une dizaine d’années. De nombreux auteurs l’ont notamment utilisée dans les applications de séparation de sources par méthodes statistiques d’ordre supérieur [13, 25, 58, 93–97].

Récemment, les auteurs de [42, 43, 48] ont montré qu’alternativement aux algorithmes d’optimisation tels que l’ALS, la décomposition PARAFAC peut également être calculée par la diagonalisation simultanée (SD pour “Simultaneous Diagonalization”) d’un systèmes de matrices.

Deux résultats principaux découlent de ce lien établi entre PARAFAC et SD :

- i) d’une part, l’algorithme de calcul par SD est plus robuste que l’ALS standard,
- ii) d’autre part, cette nouvelle approche a permis d’établir une nouvelle borne d’unicité de la décomposition PARAFAC.

Nous rappelons qu’une propriété fondamentale de la décomposition PARAFAC est son unicité sous certaines conditions. Ainsi, la borne de Kruskal [49] correspond à une limite au nombre de contributions R qui peuvent être extraites de manière unique du tenseur des observations. Il s’agit d’une condition *suffisante* garantissant l’unicité. Il s’avère que la nouvelle borne d’unicité établie, énoncée par le Théorème 3.2 du chapitre 3, est beaucoup moins contraignante que la borne de Kruskal.

Dans la continuité de cette démarche, on peut légitimement se demander si les décompositions en blocs généralisant PARAFAC peuvent aussi se calculer par une technique de diagonalisation simultanée. Si cette formulation est possible, il convient ensuite de s’interroger sur l’éventuelle nouvelle borne d’unicité qu’elle implique.

Dans un premier temps, en section 6.2, nous rappelons brièvement la démarche des auteurs de [42, 43, 48] pour reformuler la décomposition PARAFAC en terme de diagonalisation simultanée. Dans un second temps, en section 6.3, nous montrons que la décomposition du BCM-(L,L,1) peut être également calculée par la diagonalisation simultanée d’un système de matrices à

condition que $R \leq \min(IJ, K)$, i.e., la dimension longue est portée par les vecteurs du mode 3. Tout d'abord, nous montrons dans la section 6.3.1 comment le problème du calcul de cette décomposition peut être reformulé de manière générale. Puis, nous montrons en section 6.3.2 que pour le cas particulier $L = 2$, ce problème aboutit à la résolution d'un système de matrices à diagonaliser simultanément. La section 6.3.3 contient quelques considérations numériques permettant de construire l'algorithme de calcul de la décomposition du BCM-(L,L,1) dans le cas particulier $L = 2$. La généralisation de cette approche pour $L > 2$ peut être obtenue à partir des résultats des sections 6.3.2 et 6.3.3. Dans la section 6.3.4, nous montrons de manière expérimentale que l'approche par diagonalisation simultanée implique une nouvelle borne d'unicité et nous donnons l'expression analytique de cette nouvelle borne, que nous avons déjà énoncée par le Théorème 3.4 du chapitre 3.

Enfin, la section 6.4 présente quelques résultats de simulations.

6.2 SD-PARAFAC

Dans cette section, nous rappelons brièvement la reformulation du calcul de la décomposition PARAFAC en termes de diagonalisation simultanée exposée dans [42, 43, 48]. Cette approche, inspirée de [98], nécessite que l'une des trois hypothèses suivantes sur les dimensions du tenseur des observations $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ soit vérifiée :

$$\begin{cases} R \leq \min(IK, J) \\ R \leq \min(IJ, K) \\ R \leq \min(JK, I) \end{cases} . \quad (6.1)$$

Nous rappelons que I , J , K et R représentent respectivement le facteur d'étalement, le nombre de symboles, le nombre d'antennes et le nombre d'utilisateurs. On peut considérer que la dimension la plus longue du tenseur est J . Dans ce cas, l'hypothèse $R \leq \min(IK, J)$ est la moins contraignante d'un point de vue pratique car contrairement aux deux autres, elle n'impose pas que le nombre d'utilisateurs soit inférieur au nombre d'antennes ou au facteur d'étalement, mais à leur produit.

Considérons alors la représentation matricielle suivante de \mathcal{Y} , en termes des inconnues $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times R}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times R}$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times R}$:

$$\mathbf{Y}_{IK \times J} = (\mathbf{H} \odot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{S}^T. \quad (6.2)$$

Si $R \leq \min(IK, J)$, la matrice $\mathbf{H} \odot \mathbf{A}$ est de rang plein avec une probabilité égale à un si les éléments de \mathbf{A} et \mathbf{H} suivent des lois continues [43]. Supposons que la matrice \mathbf{S} est aussi de rang plein. Si les éléments de \mathbf{S} appartiennent à un alphabet fini, comme c'est le cas en communications numériques, il est possible que \mathbf{S} ne soit pas de rang plein, mais la probabilité qu'elle le soit augmente lorsque le nombre de symboles J augmente. Si $\mathbf{H} \odot \mathbf{A}$ et \mathbf{S} sont de rang plein, le rang de $\mathbf{Y}_{IK \times J}$ est R , et sa décomposition en valeurs singulières peut s'écrire

$$\mathbf{Y}_{IK \times J} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^H, \quad (6.3)$$

où $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{IK \times R}$, $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ et $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{J \times R}$. La combinaison des équations (6.2) et (6.3) permet de déduire l'existence d'une matrice non-singulière $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ a priori inconnue vérifiant

$$\begin{cases} \mathbf{H} \odot \mathbf{A} &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{W} \\ \mathbf{S}^T &= \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{V}^H \end{cases} \quad (6.4)$$

Le problème consiste désormais à trouver la matrice \mathbf{W} . Pour résoudre ce problème, on part de l'observation suivante : les colonnes de $\mathbf{H} \odot \mathbf{A}$ sont les vecteurs $\mathbf{h}_r \otimes \mathbf{a}_r$, $r \in [1 : R]$, c'est à dire les représentations vectorielles des matrices de rang 1 $\mathbf{h}_r \cdot \mathbf{a}_r^T$. La matrice \mathbf{W} contient donc les coefficients des combinaisons linéaires des colonnes de $\mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma}$ qui mènent à des matrices de rang 1. C'est cette contrainte sur \mathbf{W} qui est exploitée pour son estimation. Après quelques manipulations algébriques impliquant l'utilisation d'une application pour la détection de matrices de rang 1, il a ainsi été montré [42, 43, 48] que la matrice \mathbf{W} est solution d'un système de matrices à diagonaliser simultanément :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{\Lambda}_1 \cdot \mathbf{W}^T \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{\Lambda}_2 \cdot \mathbf{W}^T \\ \mathbf{M}_R &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{\Lambda}_R \cdot \mathbf{W}^T \end{cases},$$

dans lequel les matrices symétriques \mathbf{M}_r sont connues et les matrices diagonales $\mathbf{\Lambda}_r$ sont inconnues. De nombreuses techniques existent pour résoudre ce système, comme l'algorithme basé sur l'itération QZ [25]. Une fois \mathbf{W} estimée, on peut trouver \mathbf{A} , \mathbf{S} et \mathbf{H} .

Cette approche basée sur la diagonalisation simultanée a permis l'obtention d'un résultat fondamental concernant l'unicité de la décomposition PARAFAC. Ainsi, sous l'hypothèse $R \leq \min(IK, J)$, il a été établi [43] que la décomposition PARAFAC est essentiellement unique, au sens générique, si (cf Théorème 3.2) :

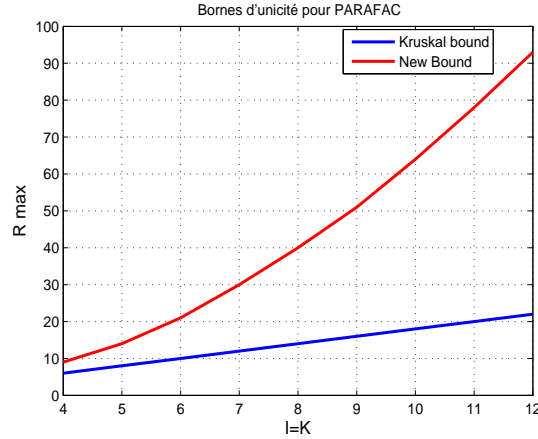
$$R(R-1) \leq \frac{1}{2}I(I-1)K(K-1). \quad (6.5)$$

Dans le cas de tenseurs symétriques, une borne bien moins contraignante que la borne de Kruskal a été proposée dans [99].

Le résultat de l'équation (6.5) signifie que le nombre d'utilisateurs simultanément admissibles dans le système est substantiellement plus élevé que celui admis par la borne de Kruskal (cf Théorème 3.1) qui, sous l'hypothèse $R \leq \min(IK, J)$, peut génériquement s'écrire

$$R + 2 \leq \min(I, R) + \min(K, R). \quad (6.6)$$

La figure 6.1 représente l'évolution du nombre R maximum en fonction des paramètres I et K , tel que les bornes d'unicité de l'équation (6.5) en rouge, et celle de l'équation (6.6) en bleu ne soient pas dépassées. Dans cette expérience, nous avons fixé la dimension longue à $J = 100$ et nous calculons R_{max} en faisant varier la valeur de $I = K$. Il s'avère que la borne de Kruskal est nettement dépassée par la nouvelle borne d'unicité, ce qui signifie en pratique que le nombre d'utilisateurs qui sont simultanément admissibles dans le système de communications est beaucoup plus élevé que précédemment.

FIG. 6.1 – Valeur maximum de R pour garantir l'unicité de PARAFAC

6.3 SD-BCM(L,L,1) avec $R \leq \min(IJ, K)$

Dans cette section, nous montrons que la décomposition en termes de rang-(L,L,1) peut également être formulée comme un problème de diagonalisation simultanée d'un système de matrices. Nous supposons ici que la longue dimension est portée par les termes de rang-1 de la décomposition, i.e., la troisième dimension (portée par K) du tenseur $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ vérifie

$$R \leq \min(IJ, K). \quad (6.7)$$

Certes, pour l'application de cette décomposition proposée dans le chapitre 4, cette hypothèse est relativement contraignante car le nombre d'utilisateurs R ne peut excéder le nombre d'antennes de réception K . Supposer que le nombre d'antennes est la dimension longue de \mathcal{Y} n'est en effet pas très réaliste, dans la mesure où cette hypothèse engendre un coût matériel conséquent. Les résultats de cette section sont donc établis sous un angle mathématique. On peut bien sûr imaginer que dans certaines applications futures de cette décomposition, la dimension longue "naturelle" (par exemple la dimension temporelle) sera portée par les vecteurs dans le mode 3.

Nous allons montrer que sous l'hypothèse (6.7), l'approche par diagonalisation simultanée implique une nouvelle borne d'unicité, beaucoup moins contraignante que la borne suffisante énoncée par le Théorème 3.3 de la section 3.3.2.

6.3.1 Reformulation du problème

Considérons la décomposition en termes blocs de rang-(L,L,1) du tenseur $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$,

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R (\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{S}_r^T) \circ \mathbf{a}_r,$$

où les matrices $\mathbf{H}_r \in \mathbb{C}^{I \times L}$ et $\mathbf{S}_r \in \mathbb{C}^{J \times L}$ sont de rang L et \mathbf{a}_r est un vecteur de taille $K \times 1$. Considérons la représentation matricielle suivante de \mathcal{Y} :

$$\mathbf{Y}_{JI \times K} = [\text{vec}(\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{S}_1^T) \dots \text{vec}(\mathbf{H}_R \cdot \mathbf{S}_R^T)] \cdot \mathbf{A}^T. \quad (6.8)$$

Soient les matrices \mathbf{X}_r de taille $(I \times J)$ et de rang L définies par $\mathbf{X}_r = \mathbf{H}_r \cdot \mathbf{S}_r^T$. L'équation (6.8) peut s'écrire

$$\mathbf{Y}_{JI \times K} = [\text{vec}(\mathbf{X}_1) \ \dots \ \text{vec}(\mathbf{X}_R)] \cdot \mathbf{A}^T = \tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{A}^T. \quad (6.9)$$

Etant donnée l'hypothèse (6.7), les matrices $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathbb{C}^{JI \times R}$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times R}$ sont génériquement de rang R ; le rang de $\mathbf{Y}_{JI \times K}$ est donc R . Considérons la SVD de $\mathbf{Y}_{JI \times K}$:

$$\mathbf{Y}_{JI \times K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^H, \quad (6.10)$$

où $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{JI \times R}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K \times R}$, et $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ est diagonale. Si on pose $\mathbf{E} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma}$, on peut déduire des équations (6.9) et (6.10) qu'il existe une matrice non-singulière inconnue $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{X}} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{W} \\ \mathbf{A}^T &= \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{V}^H \end{cases}. \quad (6.11)$$

L'estimation de \mathbf{W} est suffisante pour trouver \mathbf{H} , \mathbf{S} et \mathbf{A} . Une fois \mathbf{W} trouvée, \mathbf{A} est estimée par $\mathbf{A} = \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{W}^{-T}$. En outre, les colonnes de $\tilde{\mathbf{X}}$ correspondent à la représentation vectorisée des matrices $\mathbf{X}_r = \mathbf{H}_r \cdot \mathbf{S}_r^T$ de rang L . Ainsi, \mathbf{H}_r peut être estimée par les L vecteurs singuliers de gauche dominants de \mathbf{X}_r multipliés par les valeurs singulières associées, tandis que \mathbf{S}_r correspond aux conjugués des L vecteurs singuliers de droite dominants. Etant donnée l'indétermination propre au modèle BCM-(L,L,1),

$$\mathbf{X}_r = \mathbf{H}_r \cdot \mathbf{S}_r^T = (\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{F}_r) \cdot (\mathbf{F}_r^{-1} \cdot \mathbf{S}_r^T),$$

les matrices \mathbf{H}_r et \mathbf{S}_r trouvées correspondent en fait à l'estimation d'une base orthogonale pour l'espace des colonnes des vraies matrices \mathbf{H}_r et \mathbf{S}_r .

Le problème consiste maintenant à trouver \mathbf{W} qui vérifie (6.11).

A partir de la matrice $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^{JI \times R}$, on peut construire l'ensemble des matrices $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_R \in \mathbb{C}^{I \times J}$, définies par

$$\mathbf{E}_r = \text{unvec}([\mathbf{E}]_{:,r}). \quad (6.12)$$

Cette équation peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &= \text{unvec}([\tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{W}^{-1}]_{:,r}) \\ &= \sum_{k=1}^R \mathbf{X}_k (\mathbf{W}^{-1})_{kr}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Les matrices \mathbf{E}_r peuvent donc s'exprimer comme combinaisons linéaires des matrices $\mathbf{X}_k = \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{S}_k^T$ de rang L . De manière équivalente, il s'agit de trouver les combinaisons linéaires des matrices connues \mathbf{E}_r qui génèrent des matrices de rang L , car les coefficients de ces combinaisons sont ceux de \mathbf{W} .

$$\underbrace{\begin{array}{c} \boxed{\mathbf{X}_r} \\ \text{I} \quad \text{J} \end{array}}_{\text{Rank L matrix}} = \mathbf{W}_{1r} \begin{array}{c} \boxed{\mathbf{E}_1} \\ \text{I} \quad \text{J} \end{array} + \dots + \mathbf{W}_{Rr} \begin{array}{c} \boxed{\mathbf{E}_R} \\ \text{I} \quad \text{J} \end{array}$$

Pour résoudre ce problème, nous avons besoin d'un outil nous permettant de déterminer si une matrice est de rang L , ce qui va engendrer un certain nombre de manipulations algébriques. C'est pourquoi nous proposons d'abord de résoudre le problème pour le cas $L = 2$, puis de généraliser à $L > 2$.

6.3.2 Résolution pour $L = 2$

Nous introduisons l'outil suivant qui permet de déterminer si une matrice est de rang 2 ou non.

Théorème 6.1 Soit l'application $\Phi : (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \in \mathbb{R}^{I \times J} \times \mathbb{R}^{I \times J} \times \mathbb{R}^{I \times J} \rightarrow \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \in \mathbb{C}^{I \times I \times I \times J \times J \times J \times J}$ définie par

$$\begin{aligned}
 (\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}))_{ijklmn} = & x_{il}D_{m,n}(y_j, z_k) - x_{i,m}D_{l,n}(y_j, z_k) + x_{i,n}D_{l,m}(y_j, z_k) \\
 & + x_{il}D_{m,n}(z_j, y_k) - x_{i,m}D_{l,n}(z_j, y_k) + x_{i,n}D_{l,m}(z_j, y_k) \\
 & + y_{il}D_{m,n}(x_j, z_k) - y_{i,m}D_{l,n}(x_j, z_k) + y_{i,n}D_{l,m}(x_j, z_k) \\
 & + y_{il}D_{m,n}(z_j, x_k) - y_{i,m}D_{l,n}(z_j, x_k) + y_{i,n}D_{l,m}(z_j, x_k) \\
 & + z_{il}D_{m,n}(x_j y_k) - z_{i,m}D_{l,n}(x_j, y_k) + z_{i,n}D_{l,m}(x_j, y_k) \\
 & + z_{il}D_{m,n}(y_j x_k) - z_{i,m}D_{l,n}(y_j, x_k) + z_{i,n}D_{l,m}(y_j, x_k), \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

où $D_{m,n}(y_j, z_k) = y_{jm}z_{kn} - y_{jn}z_{km}$. Alors on a $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$ si et seulement si \mathbf{X} est au plus de rang-2.

Preuve : Les éléments de $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X})/(3!)$ correspondent aux déterminants des différentes sous-matrices (3×3) de \mathbf{X} . Une condition nécessaire et suffisante pour que \mathbf{X} soit au plus de rang-2 est que tous ces déterminants s'annulent. ■

A partir des R matrices connues \mathbf{E}_r de l'équation (6.12), on construit l'ensemble des R^3 tenseurs $\{\mathcal{P}_{rst}\}_{r,s,t \in [1,R]}$:

$$\mathcal{P}_{rst} = \Phi(\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_s, \mathbf{E}_t). \quad (6.15)$$

Remarquons que Φ est symétrique par rapport à l'ordre de ses arguments :

$$\mathcal{P}_{rst} = \mathcal{P}_{\pi(rst)} \quad \forall r, s, t \quad (6.16)$$

où π est une matrice de permutation arbitraire. De plus, puisque Φ est trilinéaire, la combinaison de (6.13) et (6.15) donne

$$\mathcal{P}_{rst} = \sum_{u,v,w=1}^R (\mathbf{W}^{-1})_{ur} (\mathbf{W}^{-1})_{vs} (\mathbf{W}^{-1})_{wt} \Phi(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_w). \quad (6.17)$$

Supposons maintenant qu'il existe un tenseur symétrique d'ordre trois $\mathcal{M} \in \mathbb{C}^{R \times R \times R}$ (nous montrerons l'existence d'un tel tenseur dans la suite) dont les éléments m_{rst} vérifient :

$$\sum_{r,s,t=1}^R m_{rst} \mathcal{P}_{rst} = 0. \quad (6.18)$$

La substitution de (6.17) dans (6.18) donne :

$$\sum_{r,s,t=1}^R \sum_{u,v,w=1}^R (\mathbf{W}^{-1})_{ur} (\mathbf{W}^{-1})_{vs} (\mathbf{W}^{-1})_{wt} m_{rst} \Phi(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_w) = 0. \quad (6.19)$$

D'après le Théorème 6.1, on a $\Phi(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u) = 0, \forall u \in [1 : R]$, car les matrices \mathbf{X}_u sont de rang $L = 2$. Ainsi, l'équation (6.19) devient :

$$\sum_{r,s,t=1}^R \sum_{\substack{u,v,w=1 \\ -(u=v=w)}}^R (\mathbf{W}^{-1})_{ur} (\mathbf{W}^{-1})_{vs} (\mathbf{W}^{-1})_{wt} m_{rst} \Phi(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_w) = 0. \quad (6.20)$$

De plus, étant donnée la symétrie de Φ et \mathcal{M} , (6.20) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & \sum_{r,s,t=1}^R \sum_{\substack{u,v=1 \\ u \neq v}}^R 3 (\mathbf{W}^{-1})_{ur} (\mathbf{W}^{-1})_{vs} (\mathbf{W}^{-1})_{vt} m_{rst} \Phi(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v) \\ & + \sum_{r,s,t=1}^R \sum_{\substack{u,v,w=1 \\ u < v < w}}^R 6 (\mathbf{W}^{-1})_{ur} (\mathbf{W}^{-1})_{vs} (\mathbf{W}^{-1})_{wt} m_{rst} \Phi(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_w) = 0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Définissons l'ensemble

$$\Omega = \{\Phi(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v) \mid 1 \leq u \neq v \leq R\} \cup \{\Phi(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_w) \mid 1 \leq u < v < w \leq R\}. \quad (6.22)$$

Nous faisons l'hypothèse cruciale que les tenseurs que contient l'ensemble Ω sont linéairement indépendants. Comme nous le montrerons par la suite, cette hypothèse implique une nouvelle borne sur R qui garantit l'unicité de la décomposition du BCM-(L,L,1).

La solution de (6.21) peut alors s'écrire :

$$\sum_{r,s,t=1}^R (\mathbf{W}^{-1})_{ur} (\mathbf{W}^{-1})_{vs} (\mathbf{W}^{-1})_{wt} m_{rst} = \lambda_{uvw} \delta_{uv} \delta_{vw} \quad \forall u, v, w, \quad (6.23)$$

où δ est le delta de Kronecker ($\delta_{uv} = 1$ si $u = v$, $\delta_{uv} = 0$ si $u \neq v$) et où λ_{uvw} est un scalaire arbitraire.

L'équation (6.23) peut se réécrire au format tensoriel :

$$\mathcal{M} = \mathcal{D} \bullet_1 \mathbf{W} \bullet_2 \mathbf{W} \bullet_3 \mathbf{W}, \quad (6.24)$$

où $\mathcal{D} \in \mathbb{C}^{R \times R \times R}$ est un tenseur diagonal dont les éléments diagonaux sont les λ_{uuu} , $u \in [1, R]$.

Ainsi, tout tenseur diagonal \mathcal{D} génère un tenseur \mathcal{M} satisfaisant (6.18). En fait, *tout* tenseur \mathcal{M} de la forme (6.24), avec \mathcal{D} un tenseur diagonal arbitraire vérifie (6.18).

L'équation (6.18) est un ensemble d'équations linéaires dont les coefficients sont donnés par les éléments des tenseurs connus \mathcal{P}_{rst} et dont les inconnues sont les éléments m_{rst} de \mathcal{M} . Des choix linéairement indépendants de \mathcal{D} correspondent à des solutions linéairement indépendantes de (6.18).

On peut conclure que si Ω est linéairement indépendant, le noyau de (6.18) contient R tenseurs \mathcal{M}_r linéairement indépendants, qui peuvent se décomposer selon l'équation (6.24). On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \mathcal{D}_1 \bullet_1 \mathbf{W} \bullet_2 \mathbf{W} \bullet_3 \mathbf{W} \\ &\vdots \\ \mathcal{M}_R &= \mathcal{D}_R \bullet_1 \mathbf{W} \bullet_2 \mathbf{W} \bullet_3 \mathbf{W}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

où $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_R$ sont diagonaux. En termes de tranches matricielles de $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_R$, l'ensemble des R équations de (6.25) mène au système suivant de R^2 équations :

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_1)_{::,r} &= \mathbf{W} \cdot \Lambda_{1,r} \cdot \mathbf{W}^T \\ &\vdots \\ (\mathcal{M}_R)_{::,r} &= \mathbf{W} \cdot \Lambda_{R,r} \cdot \mathbf{W}^T \quad \forall r \in [1, R], \end{aligned} \quad (6.26)$$

où les matrices $\Lambda_{1,r}, \dots, \Lambda_{R,r}$, $1 \leq r \leq R$, sont diagonales.

Finalement, l'estimation de \mathbf{W} consiste en la résolution du problème de diagonalisation simultanée du système (6.26).

6.3.3 Construction de l'algorithme pour $L = 2$

6.3.3.1 Construction des tenseurs \mathcal{M}_r , $r = 1 \dots R$

Dans ce paragraphe, nous montrons comment les R tenseurs symétriques \mathcal{M}_r qui sont solutions de (6.18) peuvent être construits d'une manière numériquement efficace. Une première approche consisterait à résoudre (6.18) en rangeant les R^3 tenseurs $\mathcal{P}_{rst} \in \mathbb{C}^{I \times I \times J \times J \times J}$, où $r, s, t \in [1, R]$, dans une matrice $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{I^3 J^3 \times R^3}$ dont chaque colonne contient la représentation vectorisée de taille $I^3 J^3$ d'un tenseur \mathcal{P}_{rst} donné. L'équation (6.18) peut dans ce cas s'écrire

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0}_{I^3 J^3}, \quad (6.27)$$

où \mathbf{M} est un vecteur de taille $R^3 \times 1$ qui contient les éléments m_{rst} de \mathcal{M} . Comme mentionné précédemment, cette équation a R solutions linéairement indépendantes. Ainsi, les R tenseurs \mathcal{M}_r sont obtenus en calculant le noyau de \mathbf{P} . Si le tenseur initial des observations \mathcal{Y} était bruité, les tenseurs \mathcal{M}_r sont calculés comme les R vecteurs singuliers de droite de \mathbf{P} associés aux R plus petites valeurs singulières.

Cependant, le calcul des solutions \mathcal{M}_r par cette approche n'est pas souhaitable. D'une part, elle implique le calcul de la SVD d'une matrice de taille $(I^3 J^3 \times R^3)$. D'autre part, si nous

choisissons R vecteurs indépendants dans le noyau de \mathbf{P} , il n'y a pas de garanties que les R^3 coefficients m_{rst} de chaque vecteur correspondent aux coefficients d'un tenseur symétrique. En effet, tout tenseur anti-symétrique \mathcal{M} (i.e. $m_{rst} = m_{\Pi(rst)}$ pour des permutations paires des indices et $m_{rst} = -m_{\Pi(rst)}$ pour des permutations impaires) est également solution de (6.18). Nous allons donc montrer comment les **solutions symétriques** de (6.18) peuvent être trouvées. Etant donnée la symétrie de \mathcal{M} et Φ , (6.18) peut s'écrire :

$$\sum_{r=1}^R \mathcal{P}_{rrr} m_{rrr} + 3 \sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^R \mathcal{P}_{rrs} m_{rrs} + 6 \sum_{\substack{r,s,t=1 \\ r < s < t}}^R \mathcal{P}_{rst} m_{rst} = 0. \quad (6.28)$$

Considérons l'ensemble G qui contient $N = R(R+1)(R+2)/6$ tenseurs

$$G = \{\mathcal{P}_{rrr} | 1 \leq r \leq R\} \cup \{3\mathcal{P}_{rrs} | 1 \leq r \neq s \leq R\} \cup \{6\mathcal{P}_{rst} | 1 \leq r < s < t \leq R\}. \quad (6.29)$$

Construisons la matrice $\tilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{C}^{I^3 J^3 \times N}$ dont chaque colonne $\tilde{\mathbf{p}}_{rst}$ est une représentation vectorisée de taille $I^3 J^3$ d'un tenseur donné $\alpha_{rst} \mathcal{P}_{rst}$ de l'ensemble G , où α_{rst} prend des valeurs parmi $\{1, 3, 6\}$, selon les valeurs des indices r, s, t .

Les équations (6.18) et (6.27) peuvent s'écrire

$$\tilde{\mathbf{P}} \cdot \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{0}_{I^3 J^3}, \quad (6.30)$$

où $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ contient les N coefficients permettant de construire le tenseur symétrique \mathcal{M} . Par exemple, si $R = 3$, (6.30) prend la forme

$$(\tilde{\mathbf{p}}_{111}, \tilde{\mathbf{p}}_{222}, \tilde{\mathbf{p}}_{333}, \tilde{\mathbf{p}}_{112}, \tilde{\mathbf{p}}_{113}, \tilde{\mathbf{p}}_{223}, \tilde{\mathbf{p}}_{122}, \tilde{\mathbf{p}}_{133}, \tilde{\mathbf{p}}_{233}, \tilde{\mathbf{p}}_{123}) \cdot \begin{pmatrix} m_{111} \\ m_{222} \\ \vdots \\ m_{123} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, les coefficients des R tenseurs \mathcal{M}_r sont ceux du noyau de $\tilde{\mathbf{P}}$. En présence de bruit, on prend les R vecteurs singuliers de droite de $\tilde{\mathbf{P}}$ associés aux R plus petites valeurs singulières.

6.3.3.2 Réduction de la taille du système (6.26)

Dans (6.26), $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ peut être trouvée par la diagonalisation simultanée d'un ensemble de R^2 matrices. Cependant, chacune de ces R^2 matrices est générée par les R matrices de rang 1 de l'ensemble $\{[\mathbf{W}]_{:,r} \cdot [\mathbf{W}]_{:,r}^T | 1 \leq r \leq R\}$. Par conséquent, les R^2 matrices sont linéairement dépendantes et la matrice \mathbf{W} peut être trouvée en se limitant à un ensemble de R matrices au lieu de R^2 à diagonaliser conjointement. Le problème est donc de sélectionner les R matrices les plus significatives de (6.26). Cela peut être fait en construisant la matrice $[\text{vec}((\mathcal{M}_1)_{:,:,1}) \dots \text{vec}((\mathcal{M}_R)_{:,:,R})]$ de taille $R^2 \times R^2$, dont les R vecteurs singuliers dominants de gauche sont sélectionnés. Ces vecteurs sont ensuite réécrits sous forme matricielle pour construire l'ensemble $\{\check{\mathbf{M}}_1, \dots, \check{\mathbf{M}}_R\}$ de R matrices symétriques de taille $R \times R$ qu'il faut diagonaliser conjointement.

6.3.3.3 Synopsis de l'algorithme pour $L = 2$

L'algorithme 9 synthétise les étapes de calcul de la décomposition du BCM-(L,L,1) par diagonalisation simultanée, dans le cas particulier $L = 2$.

Algorithme 9 : Algorithme SD pour la décomposition du BCM-L,L,1, avec $L = 2$

- Stack the entries of \mathcal{Y} in an $(IJ \times K)$ matrix $\mathbf{Y}_{JI \times K}$
- Compute SVD $\mathbf{Y}_{JI \times K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^H = \mathbf{E} \cdot \mathbf{V}^H$.
- For $r \in [1, R]$, stack r^{th} column of \mathbf{E} in an $(I \times J)$ matrix \mathbf{E}_r
- For $r, s, t \in [1, R]$, $r \leq s \leq t$, build the $R(R+1)(R+2)/6$ tensors $\mathcal{P}_{rst} = \Phi(\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_s, \mathbf{E}_t)$ of size $I \times I \times I \times J \times J \times J$
- Balance these tensors with the weights $\alpha_{rst} \in \{1, 3, 6\}$ to build the set G of Eq. (6.29)
- Build the matrix $\tilde{\mathbf{P}}$ of size $(I^3 J^3 \times R(R+1)(R+2)/6)$ and compute its R right singular vectors associated with the R lowest singular values.
- The R symmetric tensors \mathcal{M}_r are built from the entries of these R vectors.
- Build the set of R^2 symmetric matrices of size $R \times R$ from the slices of the tensors \mathcal{M}_r , and select the R most significant $\tilde{\mathbf{M}}_r$.
- Find the matrix \mathbf{W} by means of simultaneous diagonalization of

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{M}}_1 &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{\Lambda}_1 \cdot \mathbf{W}^T \\ \tilde{\mathbf{M}}_2 &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{\Lambda}_2 \cdot \mathbf{W}^T \\ &\vdots \\ \tilde{\mathbf{M}}_R &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{\Lambda}_R \cdot \mathbf{W}^T \end{cases} \quad (6.31)$$

- Once \mathbf{W} is known, the estimation of \mathbf{A} , \mathbf{B} and \mathbf{C} immediately follows.
-

Remarque : La généralisation de la diagonalisation simultanée pour $L > 2$ découle directement des résultats établis dans cette section. D'abord, une application permettant de détecter si une matrice est de rang L ou non est nécessaire. De même que précédemment, la symétrie de cette application ainsi que celle du tenseur \mathcal{M} d'ordre $(L+1)$ sont utilisées, pour aboutir finalement à un système de $R^{(L+1)}$ matrices à diagonaliser, qui peut lui-même se réduire à un système de R matrices à diagonaliser.

6.3.4 Une nouvelle borne d'unicité

Dans cette section, nous donnons une nouvelle borne d'unicité pour la décomposition du modèle BCM-(L,L,1). Notre démarche est la suivante : d'abord, nous mettons en évidence l'existence d'une nouvelle borne de manière empirique pour $L = 2$, puis nous prouvons l'expression analytique de cette borne pour $L = 2$, et enfin nous généralisons cette borne pour $L > 2$.

6.3.4.1 Borne expérimentale pour $L = 2$

La formulation du calcul de la décomposition du BCM-(2,2,1) en termes d'un système à diagonaliser conjointement a nécessité l'hypothèse forte d'indépendance linéaire de l'ensemble Ω

I	J	K	$R_{max}^{(SC)}$	$R_{max}^{(SD)}$
3	4	2	1	2
3	5	3	1	3
3	6	4	1	4
3	7	5	1	5
4	4	4	2	4
4	5	5	2	5
4	6	7	3	7
4	7	8	3	8
5	5	7	2	7
5	6	9	3	9
5	7	11	3	11
5	8	14	4	14

I	J	K	$R_{max}^{(SC)}$	$R_{max}^{(SD)}$
6	6	12	4	12
6	7	15	4	15
6	8	17	5	17
6	9	20	5	20
7	7	18	4	18
7	8	21	5	21
7	9	25	5	25
7	10	28	6	28
8	8	25	6	25
8	9	29	6	29
8	10	33	7	33
8	11	37	7	37

TAB. 6.1 – Borne expérimentale pour l'unicité du BCM-(2,2,1)

$$\Omega = \{\Phi(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v) \mid 1 \leq u \neq v \leq R\} \cup \{\Phi(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_w) \mid 1 \leq u < v < w \leq R\}. \quad (6.32)$$

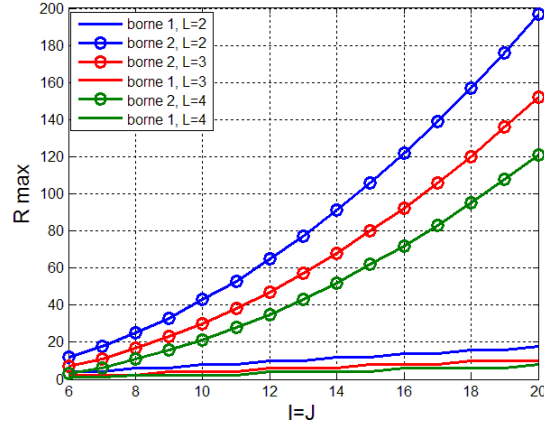
Dans le tableau 6.1, nous montrons par des résultats expérimentaux que cette hypothèse sur Ω implique en fait une nouvelle borne sur le nombre R de contributions qui peuvent être extraites du tenseur des observations. Nous faisons l'expérience suivante : on fixe $L = 2$ et pour des valeurs données de I , J et K qui satisfont $\min(IJ, K) \geq R$, on cherche la valeur maximale de R , notée $R_{max}^{(SD)}$, telle que l'ensemble Ω soit encore linéairement indépendant. On compare alors cette valeur à la valeur maximale de R , notée $R_{max}^{(SC)}$ telle que la condition suffisante d'unicité donnée par le Théorème 3.3 (ii) soit encore vérifiée

$$\min\left(\left\lfloor \frac{I}{L} \right\rfloor, R\right) + \min\left(\left\lfloor \frac{J}{L} \right\rfloor, R\right) \geq R + 2.$$

Le tableau 6.1 indique que $R_{max}^{(SD)}$ est significativement plus grand que $R_{max}^{(SC)}$. Ainsi, la diagonalisation simultanée implique une borne d'unicité beaucoup moins contraignante que la borne précédente car elle autorise l'extraction d'un nombre de contributions substantiellement plus élevé. Les paragraphes suivants donnent les expressions analytiques de cette nouvelle borne pour $L = 2$ et $L > 2$.

6.3.4.2 Borne analytique pour $L = 2$

Dans la section 6.3.2, nous avons supposé que $R \leq \min(IJ, K)$ et que l'ensemble Ω est linéairement indépendant. L'examen des conditions garantissant l'indépendance linéaire de Ω nous a permis de trouver l'expression analytique de la nouvelle borne d'unicité pour la décomposition en termes de rang-(2,2,1), donnée par le théorème suivant.

FIG. 6.2 – Valeur maximum de R pour garantir l'unicité du BCM-(L,L,1)

Théorème 6.2 *La décomposition en termes de rang-(2,2,1) d'un tenseur d'ordre 3 est génériquement unique si*

$$R \leq K \quad \text{et} \quad C_I^3 \cdot C_J^3 \geq (C_R^3 + 2C_R^2). \quad (6.33)$$

La preuve de ce théorème est donnée en Annexe A.

6.3.4.3 Borne analytique $\forall L$

Le résultat suivant généralise la nouvelle borne d'unicité pour toutes les valeurs de L .

Conjecture 6.3 *La décomposition en termes de rang-(L,L,1) d'un tenseur d'ordre 3 est génériquement unique si*

$$R \leq K \quad \text{et} \quad C_I^{L+1} \cdot C_J^{L+1} \geq C_{R+L}^{L+1} - R. \quad (6.34)$$

Les éléments de preuve de cette conjecture sont donnés en Annexe B. La démonstration finalisée n'est pas présentée dans ce manuscrit.

Nous pouvons maintenant comparer cette nouvelle borne à celle du Théorème 3.3. Notons que l'hypothèse (6.7) implique que c'est à la borne suffisante (ii) de ce Théorème que nous pouvons comparer la nouvelle borne (6.34).

La figure 6.2 représente le nombre maximum R tel que ces deux bornes ne soient pas dépassées. La borne suffisante du Théorème 3.3 est notée borne 1 tandis que la nouvelle borne est notée borne 2. Nous avons fixé la dimension longue à $K = 200$ et nous faisons varier $I = J$. Pour les valeurs $L = 2$, $L = 3$ et $L = 4$, nous représentons l'évolution du nombre R maximum tel que les deux bornes soient satisfaites. Il s'avère que la nouvelle borne est beaucoup moins contraignante que la borne suffisante du Théorème 3.3 (ii) dans la mesure où elle permet d'extraire du tenseur des observations un nombre de contributions substantiellement plus élevé.

6.4 Résultats de simulations

Dans cette section, nous comparons les performances de l'algorithme SD-(L,L,1) (algorithme 9) à celles de l'algorithme ALS-(L,L,1) (algorithme 2) donné dans le chapitre 5. Nous générons le tenseur des observations bruitées $\tilde{\mathcal{Y}}$ de la manière suivante :

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \frac{\mathcal{Y}}{\|\mathcal{Y}\|_F} + \sigma_N \frac{\mathcal{N}}{\|\mathcal{N}\|_F}, \quad (6.35)$$

où :

- $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ est le tenseur des observations non bruitées, qui peut être décomposé de manière exacte en termes de rang-(L,L,1),
- $\mathcal{N} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ est le tenseur de bruit dont les éléments suivent une distribution Gaussienne de moyenne nulle et de variance 1,
- σ_N contrôle le niveau de bruit.

Nous rappelons que les matrices inconnues de la décomposition sont $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times RL}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times RL}$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times R}$.

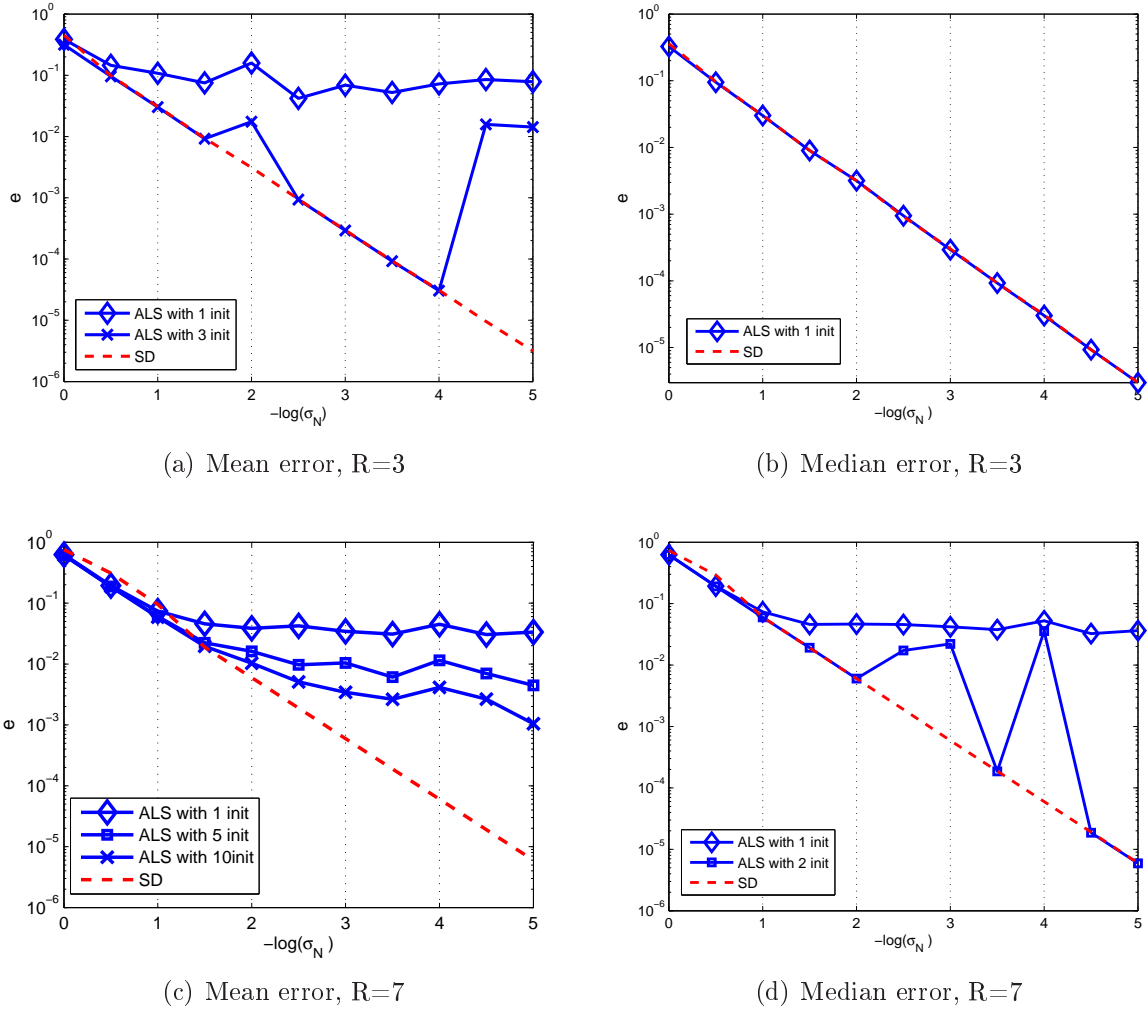
D'une part, l'algorithme ALS est utilisé avec 10 initialisations aléatoires différentes. Notons $\hat{\mathbf{A}}^{(n)}$ l'estimation de \mathbf{A} à l'itération n et $\underline{\hat{\mathbf{A}}}^{(n)}$ la matrice obtenue en divisant toutes les colonnes de $\hat{\mathbf{A}}^{(n)}$ par leur norme Frobenius. L'ALS est arrêté lorsque $\|\underline{\hat{\mathbf{A}}}^{(n)} - \underline{\hat{\mathbf{A}}}^{(n-1)}\|_F < \epsilon$, où $\epsilon = 10^{-10}$. D'autre part, l'algorithme SD est appliqué. Le problème de diagonalisation simultanée de l'équation (6.31) est résolu par la technique d'itération QZ-étendue proposée dans [25].

Pour les deux algorithmes, la précision est mesurée par l'erreur relative $e = \|\mathcal{Y} - \hat{\mathcal{Y}}\|_F / \|\mathcal{Y}\|_F$, où le tenseur estimé $\hat{\mathcal{Y}}$ est construit à partir des matrices estimées après convergence de l'algorithme.

Pour illustrer l'évolution de l'erreur e en fonction du niveau de bruit σ_N , nous avons utilisé des simulations de Monte-Carlo consistant en 100 tests indépendants pour chaque valeur de σ_N . La figure 6.3 synthétise les résultats de simulations obtenus pour des paramètres de valeur $I = 6$, $J = 6$, $K = 20$ et $L = 2$. Nous avons représenté l'erreur moyenne ainsi que l'erreur médiane, pour les valeurs $R = 3$ et $R = 7$.

La figure 6.3(a) montre que la précision moyenne de l'algorithme SD est meilleure que l'ALS initialisé 3 fois. A partir de la 4^{ème} initialisation les deux courbes sont confondues. La précision médiane (figure 6.3(b)) est quant à elle identique pour les deux algorithmes dès la première initialisation de l'ALS. En effet, contrairement à la mesure moyenne, la mesure médiane ne prend pas en compte les valeurs extrêmes de e occasionnées par l'arrêt de l'ALS sur un minimum local. Notons que les résultats des figures 6.3(a) et 6.3(b) ont été obtenus avec une valeur de $R = 3$, ce qui signifie que la borne suffisante d'unicité du Théorème 3.3 (ii) n'est pas dépassée (et a fortiori la nouvelle borne non plus).

Les figures 6.3(c) et 6.3(d) ont été obtenues dans les mêmes conditions que précédemment, mais avec $R = 7$, si bien que seule la nouvelle borne d'unicité n'est pas dépassée. On constate dans ce cas que la précision moyenne de l'ALS après 10 initialisations est encore très loin de celle de l'algorithme SD. Il faudrait choisir un nombre d'initialisations plus élevé pour que les performances de l'ALS s'approchent de celles de SD. Cet écart de performance se traduit

FIG. 6.3 – Evolution de e en fonction de σ_N

également au niveau de l'erreur médiane, où il faut attendre 3 initialisations pour que les courbes soient identiques.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi un lien entre la décomposition du BCM-(L,L,1) et la diagonalisation simultanée d'un système de matrices. Cette approche avait notamment permis la découverte d'une nouvelle borne d'unicité pour la décomposition PARAFAC. Sa généralisation au modèle BCM-(L,L,1) nous a également permis de trouver une nouvelle borne d'unicité pour ce modèle, beaucoup moins contraignante que la condition d'unicité du Théorème 3.3 (ii). Cependant, cette borne est valable si la dimension longue du tenseur des observations est portée par les termes de rang 1. Dans le contexte applicatif de ce manuscrit, cette condition est

contraignante car cette dimension correspond au nombre d'antennes.

C'est pourquoi nous nous sommes récemment intéressés au cas où la dimension longue est portée par l'une des deux matrices de rang L , par exemple la matrice Toeplitz qui contient les symboles. Nos premiers résultats, non exposés dans ce document, suggèrent que l'on peut dans ce cas formuler la décomposition du BCM- $(L,L,1)$ comme un problème de bloc-diagonalisation simultanée.

Chapitre 7

Conclusion

7.1 Contributions

Les travaux présentés dans ce document s'inscrivent dans le cadre des méthodes algébriques déterministes pour la séparation aveugle de signaux CDMA reçus par un réseau d'antennes, dans un contexte multi-utilisateurs. Les problèmes de séparation aveugle de sources sont classiquement formulés en termes d'algèbre matricielle. L'originalité de notre approche réside dans la modélisation tensorielle des signaux reçus. L'exploitation des diversités temporelle, spatiale et de code permet en effet de stocker les échantillons du signal global reçu dans un tenseur d'ordre trois. La séparation des signaux consiste alors à décomposer ce tenseur au moyen d'outils d'algèbre multilinéaire, afin d'estimer la contribution de chaque utilisateur.

Les travaux fondamentaux de Sidiropoulos, Giannakis et Bro ont montré que la décomposition PARAFAC du tenseur des observations permet de résoudre le problème si le canal de propagation est sans-mémoire. Nous avons proposé d'étendre cette approche aux canaux à trajets multiples engendrant de l'IES.

Le tableau 7.2 synthétise le contenu de ce document et donne le numéro de section associée à chacun des aspects étudiés.

D'un point de vue mathématique, la contribution principale de nos travaux est la généralisation de la décomposition PARAFAC d'un tenseur d'ordre trois. Dans cette optique, nous avons introduit de nouvelles décompositions tensorielles. Tandis que la décomposition PARAFAC consiste en une somme de contributions de rang 1, ces nouvelles décompositions permettent de modéliser des contributions plus complexes.

D'un point de vue applicatif, nous avons établi que les décompositions PARAFAC généralisées permettent de réaliser conjointement la séparation et l'égalisation aveugles des signaux CDMA présents dans un mélange convolutif. La séparation repose sur l'unicité des décompositions tensorielles. Cet aspect est fondamental car dans le contexte applicatif considéré, l'unicité s'interprète comme le nombre maximum d'utilisateurs qui peuvent communiquer simultanément dans le système. L'égalisation repose quant à elle sur la préservation de la structure Toeplitz de la matrice contenant les symboles transmis par chaque utilisateur.

D'un point de vue algorithmique, nous avons développé plusieurs techniques de calcul des nouvelles décompositions. L'algorithme ALS nous a donné un premier aperçu des performances

Modèle	Unicité	Application	Algorithmes	Compression
PARAFAC :3.2	3.2.2	Séparation, canal instantané 4.3	EVD : 3.6.1 ALS :5.2.1 ELSCS :5.3 LM :5.4.2 SD :6.2	Selon dimensions : 5.5.1 Selon rang : 5.5.2
BCM-(L,L,1) : 3.3	3.3.2	Séparation et égalisation : canal multitrajets, réflexions champ lointain 4.4	EVD : 3.6.2 ALS : 5.2.2 ELSCS : 5.3 LM :5.4.3 SD :6.3	Selon dimensions : 5.5.1 Selon rang : 5.5.2
BCM-(L,P,.) : 3.4	3.4.2	Séparation et égalisation : canal multitrajets, réflexions non uniquement champ lointain 4.5	EVD : 3.6.3 ALS : 5.2.3 ELSCS : 5.3 LM : 5.4.4	Selon dimensions : 5.5.1 Selon rang : 5.5.2

TAB. 7.2 – Tableau synthétique des contributions de ce document

que l'on peut obtenir avec les récepteurs aveugles proposés. Cependant, cet algorithme est très sensible au conditionnement et à l'initialisation et sa convergence est parfois lente. En nous inspirant des travaux récents de Comon et Rajih, nous avons ensuite montré que l'insertion d'une étape de recherche linéaire optimisée avec pas complexe (ELSCS) dans l'ALS permet d'améliorer considérablement ses performances. Enfin, nous avons établi que l'algorithme de Levenberg-Marquardt peut être adapté au calcul des décompositions tensorielles généralisées. Cet algorithme de type Gauss-Newton est beaucoup moins sensible au conditionnement des données que l'ALS ou l'ELSCS et il offre de meilleures propriétés de convergence. Il nécessite cependant un temps de calcul plus conséquent, surtout pour des données de grande taille. Pour pallier cet inconvénient, on peut préalablement réaliser une compression du tenseur des observations puis calculer la décomposition du tenseur de dimensions réduites. Nous avons également établi que sous certaines conditions, les décompositions tensorielles peuvent être calculées de manière non-itérative par une simple décomposition en valeurs propres. En présence de bruit, cette technique permet de bien initialiser les algorithmes d'optimisation précédents. Enfin, nous nous sommes intéressés plus en détail à l'unicité des décompositions tensorielles. Pour la décomposition PARAFAC, des travaux récents ont montré que la reformulation du problème en terme d'un système de matrices à diagonaliser conjointement permet de trouver une nouvelle borne d'unicité, beaucoup moins contraignante que la borne de Kruskal. En adoptant la même démarche, nous avons reformulé le calcul de l'une des décompositions généralisées et nous avons établi l'expression analytique d'une nouvelle borne d'unicité.

7.2 Perspectives

7.2.1 Applications

Le contexte applicatif de ce document se limite aux systèmes CDMA. Cependant, l'application des nouveaux modèles algébriques proposés aux systèmes sur-échantillonnés est également envisageable. Dans ce cas, la diversité de code est remplacée par une diversité de sur-échantillonnage temporel et les symboles ne sont pas multipliés par une onde d'étalement mais directement par un filtre de mise en forme sur-échantillonné.

Nous avons considéré dans notre étude la liaison montante d'un système SIMO multi-utilisateurs, i.e. chaque utilisateur ne dispose que d'une seule antenne. Une perspective envisageable serait de généraliser les modèles proposés pour résoudre le problème de déconvolution aveugle dans un système MIMO multi-utilisateurs.

On peut également envisager une application de ces modèles en OFDM, où le nombre de porteuses peut être considéré comme une diversité exploitable d'un point de vue tensoriel. Plusieurs travaux adoptant un point de vue tensoriel en OFDM ont d'ailleurs été proposés récemment [100–102].

Une autre application possible de l'analyse tensorielle en composantes blocs consiste à modéliser le couplage entre trames à transmettre, antennes de transmission et codes d'étalement dans les systèmes MIMO ("space-time coding"). En effet, dans ce type de systèmes, les signaux sont naturellement multi-dimensionnels et une modélisation tensorielle semble adéquate [103].

Enfin, même si les nouveaux outils mathématiques proposés trouvent une application directe en traitement du signal pour les télécommunications, ils dépassent de loin ce contexte. Dans la mesure où le champ applicatif du modèle PARAFAC s'est considérablement élargi depuis 1970, une perspective possible sur le long terme serait d'appliquer les décompositions PARAFAC généralisées à des problèmes multivariés qui ne peuvent être résolus par la décomposition PARAFAC standard.

7.2.2 Suivi de sous-espaces

Les algorithmes présentés dans ce document supposent le canal temporellement stationnaire durant la période d'observation. Dans la mesure où notre approche est purement déterministe, ces algorithmes peuvent fonctionner sur des trames très courtes. Cependant, s'il existe des contraintes temps-réel, le calcul d'une décomposition tensorielle complète pour chaque trame collectée risque d'être trop coûteux. Une perspective possible serait de développer des algorithmes adaptatifs de suivi aveugle de sous-espaces pour les décompositions tensorielles.

Bibliographie

- [1] *J. Sanchez and M. Thioune, UMTS. Hermes Science Publications, 2004.*
- [2] *G. Foschini and M. Gans, "On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas," Wireless Personal Communications, vol. 6, pp. 311–335, 1998.*
- [3] *L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle, "Fetal Electrocardiogram Extraction by Blind Source Subspace Separation," IEEE Trans. Biomedical Engineering, vol. 47, no. 5, pp. 567–572, May 2000.*
- [4] *L. Khor, W. Woo, S. Purves, S. Dlay, and J. Hendersen, "Novel statistical approach to blind recovery of earth signals and source wavelet," in in 67th EAGE Conference and Exhibition, Madrid, Spain, 2005.*
- [5] *G. Gelle, M. Colas, and C. Servièrè, "Blind source separation : A new preprocessing tool for rotating machines monitoring ? theoretical background and practical considerations," IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, vol. 52, no. 3, pp. 790–796, mar. 2003.*
- [6] *A. Ypma and P. Pajunen, "Rotating machine vibration analysis with second-order independent component analysis," in Proceedings of the First International Workshop on Independent Component Analysis and Signal Separation, ICA'99, jan. 1999, pp. 37–42.*
- [7] *A.-J. van der Veen, "Algebraic Methods for Deterministic Blind Beamforming," Proc. IEEE, vol. 86, pp. 1987–2008, 1998.*
- [8] *E. Moulines, P. Duhamel, J.-F. Cardoso, and S. Mayrargue, "Subspace Methods for the Blind Identification of Multichannel FIR filters," IEEE Trans. Signal Proc., vol. 43, pp. 516–525, 1995.*
- [9] *A. Gorokhov and P. Loubaton, "Subspace Based Techniques for Second Order Blind Separation of Convolutional Mixtures with Temporally Correlated Sources," IEEE Trans. on Circuit and Systems, vol. 44, no. 9, pp. 813–820, Sept. 1997.*
- [10] *A. Mansour, C. Jutten, and P. Loubaton, "Adaptive Subspace Algorithm for Blind Separation of Independent Sources in Convolutional Mixtures," IEEE Trans. on Signal Proc., vol. 48, no. 2, pp. 583–586, Feb. 2000.*
- [11] *P. Loubaton, E. Moulines, and P. Regalia, "Subspace methods for blind identification and deconvolution," in Signal Processing Advances in Wireless Communications, G. Giannakis, Y. Hua, P. Stoica, and L. Tong, Eds. Prentice-Hall, 2000, pp. 63–112.*

- [12] P. Comon, "Independent Component Analysis, a new concept?" *Signal Processing*, Elsevier, vol. 36, no. 3, pp. 287–314, Apr. 1994, special issue on *Higher-Order Statistics*.
- [13] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.-F. Cardoso, and E. Moulines, "A blind source separation technique using second order statistics," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 434–444, fev. 1997.
- [14] L. Perros-Meilhac, E. Moulines, K. Abed-Meraim, P. Chevalier, and P. Duhamel, "Blind identification of multipath channels : A parametric subspace approach," *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 49, no. 7, pp. 1468–1480, 2001.
- [15] N. Delfosse and P. Loubaton, "Adaptive Blind Separation of Independent Sources : a Second Order Stable Algorithm," *IEEE Trans. on Circuit and Systems*, vol. 47, no. 7, pp. 1056–1071, July 2000.
- [16] J. F. Cardoso, "Source Separation using Higher Order Moments," *Proc. IEEE Inter. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pp. 2109–2112, 1989.
- [17] L. Albera, A. Ferréol, P. Comon, and P. Chevalier, "Sixth order blind identification of underdetermined mixtures (BIRTH) of sources," in *ICA 03, Fourth International Symposium on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation, Nara, Japan, avr. 2003*.
- [18] A. Ferréol, L. Albera, and P. Chevalier, "Fourth order blind identification of underdetermined mixtures of sources (fobium)," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 53, no. 5, pp. 1640–1653, mai 2005.
- [19] P. Chevalier, L. Albera, A. Ferréol, and P. Comon, "On the virtual array concept for the higher order array processing," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 53, no. 4, pp. 1254–1271, avr. 2005.
- [20] L. De Lathauwer, J. Castaing, and J.-F. Cardoso, "Fourth-Order Cumulant Based Blind Identification of Underdetermined Mixtures," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 6, pp. 2965–2973, June 2007.
- [21] B. Chen, A. Petropulu, and L. De Lathauwer, "Blind Identification of Convolutional MIMO Systems with 3 Sources and 2 Sensors," *Applied Signal Processing*, no. 5, pp. 487–496, May 2002.
- [22] A. Swami, G. B. Giannakis, and G. Zhou, "Bibliography on Higher-Order Statistics," *Signal Processing*, vol. 60, no. 1, pp. 65–126, 1997.
- [23] A. Touzni, I. Fijalkow, M. G. Larimore, and J. R. Treichler, "A Globally Convergent Approach for Blind MIMO Adaptive Deconvolution," *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 49, no. 6, pp. 1166–1178, 2001.
- [24] D. N. Godard, "Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communication Systems," *IEEE Trans. Communications*, vol. 28, pp. 1867–1875, 1980.
- [25] A.-J. van der Veen and A. Paulraj, "An Analytical Constant Modulus Algorithm," *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 44, pp. 1136–1155, 1996.

- [26] A.-J. V. der Veen, *Signal Processing Advances in Wireless and Mobile Communications, "Algebraic Constant Modulus Algorithms"*. Prentice Hall : G. Giannakis Ed., 2000, vol. 2, ch. 3.
- [27] G. Xu, H. Liu, L. Tong, and T. Kailath, "A Least-Squares Approach to Blind Channel Identification," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 43, no. 12, pp. 2982–2993, Dec. 1995.
- [28] H. Liu and G. Giannakis, "Deterministic approaches for blind equalization of time-varying channels with antenna arrays," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 46, no. 11, pp. 3003–3013, Nov. 1998.
- [29] N. D. Sidiropoulos, G. B. Giannakis, and R. Bro, "Blind PARAFAC Receivers for DS-CDMA Systems," *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 48, pp. 810–823, 2000.
- [30] R. A. Harshman, "Foundations of the PARAFAC procedure : Model and Conditions for an 'explanatory' Multi-mode Factor Analysis," *UCLA Working Papers in Phonetics*, vol. 16, pp. 1–84, 1970.
- [31] D. Nion and L. De Lathauwer, "A Block Component Model based Blind DS-CDMA Receiver," *IEEE Trans. Signal Proc.*, 2007, submitted.
- [32] D. Nion and L. De Lathauwer, "A Block Factor Analysis Based Receiver for Blind Multi-User Access in Wireless Communications," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Toulouse, FR., 2006, pp. 825–828.
- [33] L. De Lathauwer, "Decompositions of a Higher-Order Tensor in Block Terms – part I : Lemmas for Partitioned Matrices," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2006, submitted.
- [34] —, "Decompositions of a Higher-Order Tensor in Block Terms – part II : Definitions and Uniqueness," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2006, submitted.
- [35] L. De Lathauwer and D. Nion, "Decompositions of a Higher-Order Tensor in Block Terms – part III : Alternating Least Squares Algorithms," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2006, submitted.
- [36] A. de Baynast and L. De Lathauwer, "Détection Autodidacte pour des Systèmes à Accès Multiple basée sur l'analyse PARAFAC," in *Proc. of XIX GRETSI Symp. Sig. Image Proc.*, Paris, FR, Sep 2003.
- [37] L. De Lathauwer and A. de Baynast, "Blind Deconvolution of DS-CDMA Signals by Means of Decomposition in Rank-(1,L,L) Terms," *IEEE Trans. Signal Proc.*, 2007, accepted.
- [38] D. Nion and L. De Lathauwer, "A Tensor-Based Blind DS-CDMA Receiver Using Simultaneous Matrix Diagonalization," in *Proc. IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*, Helsinki, FIN., 2007.
- [39] R. Bro, "PARAFAC : Tutorial and Applications," *Chemom. Intell. Lab. Syst.*, vol. 38, pp. 149–171, 1997.
- [40] M. Rajih and P. Comon, "Enhanced Line Search : A Novel Method to Accelerate PARAFAC," in *Proc. of Eusipco'05*, 2005.

- [41] M. Rajih, P. Comon, and R. A. Harshman, "Enhanced Line Search : A Novel Method to Accelerate PARAFAC," SIAM J. Matrix Anal. Appl., Tensor Decompositions and Applications, 2007, to appear.
- [42] J. Castaing, "Méthodes parafac pour la séparation de signaux," Ph.D. dissertation, Université de Cergy-Pontoise, 2006.
- [43] L. De Lathauwer, "A Link between the Canonical Decomposition in Multilinear Algebra and Simultaneous Matrix Diagonalization," SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 28, no. 3, pp. 642–666, 2006.
- [44] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle, "Computation of the Canonical Decomposition by Means of a Simultaneous Generalized Schur Decomposition," SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 26, no. 2, pp. 295–327, 2004.
- [45] S. E. Leurgans and B. R. Kowalski, "A decomposition for three-way arrays," SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 14, no. 4, pp. 1064–1083, 1993.
- [46] G. Tomasi and R. Bro, "A Comparison of Algorithms for Fitting the PARAFAC Model," Comp. Stat. Data Anal., vol. 50, pp. 1700–1734, 2006.
- [47] D. Nion and L. De Lathauwer, "Levenberg-Marquardt computation of the Block Factor Model for Blind Multi-User Access in Wireless Communications," in Proc. 14th European Signal Processing Conference (Eusipco), Florence, IT., 2006.
- [48] L. De Lathauwer and J. Castaing, "Tensor-Based Techniques for the Blind Separation of DS-CDMA signals," Signal Processing, Special Issue *Tensor Signal Processing*, vol. 87, no. 2, pp. 322–336, Feb. 2007.
- [49] J. B. Kruskal, "Three-way Arrays : Rank and Uniqueness of Trilinear Decompositions, with Application to Arithmetic Complexity and Statistics," Linear Algebra Appl., vol. 18, pp. 95–138, 1977.
- [50] D. Nion and L. De Lathauwer, "A simultaneous diagonalization technique for the decomposition of a third-order tensor in rank- $(L,L,1)$ terms," SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2007, submitted.
- [51] C. R. Rao and S. K. Mitra, Generalized Inverse of Matrices and Its Applications. New York : Wiley, 1971.
- [52] L. De Lathauwer, "Signal Processing based on Multilinear Algebra," Ph.D. dissertation, Faculty of Engineering, K.U. Leuven, Belgium, 1997.
- [53] L. De Lathauwer and B. De Moor, "From Matrix to Tensor : Multilinear Algebra and Signal Processing," in Mathematics in Signal Processing IV, J. McWhirter and I. Proudler, Eds. Clarendon Press, 1998, pp. 1–15.
- [54] P. Comon, "Tensor Decompositions," in Mathematics in Signal Proc. V, J. McWhirter and I. Proudler, Eds. Clarendon Press, 2002, pp. 1–24.
- [55] M. A. O. Vasilescu and D. Terzopoulos, "Multilinear image analysis for facial recognition," in Proc. of International Conference on Pattern Recognition (ICPR), Quebec, Canada, Aug 2002.

- [56] A. Smilde, R. Bro, and P. Geladi, *Multi-way Analysis. Applications in the Chemical Sciences.* Chichester, U.K. : John Wiley and Sons, 2004.
- [57] N. D. Sidiropoulos, R. Bro, and G. B. Giannakis, "Parallel Factor Analysis in Sensor Array Processing," *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 48, pp. 2377–2388, 2000.
- [58] E. Moreau and C. D. Luigi, "A least-squares approach to joint-diagonalization of tensor with application to source separation," in *Proc. 7th IEEE International Symposium on Signal Processing and its Applications (ISSPA'2003), Paris, FR, July 2003.*
- [59] G. H. Golub and C. F. Van Loan, "Matrix Computations," in 3rd ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
- [60] L. R. Tucker, "The extension of factor analysis to three-dimensional matrices," in *Contributions to mathematical psychology*, R. Holt and Winston, Eds. H. Gulliksen and N. Frederiksen, 1964, pp. 109–127.
- [61] —, "Some mathematical notes on three-mode factor analysis," *Psychometrika*, vol. 31, pp. 279–311, 1966.
- [62] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle, "A Multilinear Singular Value Decomposition," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 21, no. 4, pp. 1253–1278, 2000.
- [63] D. Muti and S. Bourennane, "Multiway filtering based on fourth-order cumulants," *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, vol. 7, pp. 1147–1158, 2005.
- [64] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle, "The Application of Higher Order Singular Value Decomposition to Independent Component Analysis," in *SVD and Signal Processing, III. Algorithms, Applications and Architectures*, M. Moonen and B. D. Moor, Eds. Elsevier, Amsterdam, 1995, pp. 383–390.
- [65] N. Renard, S. Bourennane, and J. Blanc-Talon, "Multiway filtering applied on hyperspectral images." in *ACIVS, 2006*, pp. 127–137.
- [66] R. Bro, "Multi-way Analysis in the Food Industry : Models, Algorithms, and Applications," *Ph.D. dissertation, University of Amsterdam, Amsterdam, 1998.*
- [67] F. L. Hitchcock, "The Expression of a Tensor or a Polyadic as a Sum of Products," *J. Math. Phys.*, vol. 6, no. 1, pp. 164–189, 1927.
- [68] —, "Multiple Invariants and Generalized Rank of a p-way Matrix or Tensor," *J. Math. Phys.*, vol. 7, no. 1, pp. 39–79, 1927.
- [69] J. D. Carroll and J. Chang, "Analysis of Individual Differences in Multidimensional Scaling via an N-way Generalization of "Eckart-Young" Decomposition," *Psychometrika*, vol. 35, no. 3, pp. 283–319, 1970.
- [70] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle, "An Introduction to Independent Component Analysis," *J. Chemometrics*, vol. 14, pp. 123–149, 2000.
- [71] —, "Independent Component Analysis and (Simultaneous) Third-Order Tensor Diagonalization," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 10, pp. 2262–2271, Oct. 2001.
- [72] K. Mokios, N. D. Sidiropoulos, and A. Potamianos, "Blind Speech Separation Using Parafac Analysis and Integer Least Squares," in *Proc. ICASSP 06*, vol. 5, 2006, pp. 73–76.

- [73] X. Zhang and D. Xu, "Blind parafac signal detection for polarization sensitive array," EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2007.
- [74] T. Acar and A. Petropulu, "Blind mimo system identification using parafac decomposition of an output hos-based tensor," in Proc. of 37th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Nov. 2003.
- [75] G. Beylkin and M. Mohlenkamp, "Numerical operator calculus in higher dimensions," in Proc. of the National Academy of Science, vol. 99, 2002, pp. 10 246–10 251.
- [76] —, "Algorithms for numerical analysis in high dimensions," SIAM Journal. Sci. Comput., vol. 26, pp. 2133–2159, 2005.
- [77] N. D. Sidiropoulos and R. Bro, "On the Uniqueness of Multilinear Decomposition of N -way Arrays," Journal of Chemometrics, vol. 14, pp. 229–239, 2000.
- [78] A. Stegeman and N. D. Sidiropoulos, "On kruskal's uniqueness condition for the Candecomp/Parafac decomposition," Lin. Alg. Appl., vol. 420, pp. 540–552, 2007.
- [79] A. de Baynast, L. De Lathauwer, and B. Aazhang, "Blind PARAFAC Receivers for Multiple Access-Multiple Antenna System," in Proc. IEEE Vehicular Technology Conference (VTC), Orlando, FL, October 2003.
- [80] A.-J. van der Veen, S. Talwar, and A. Paulraj, "Blind Estimation of Multiple Digital Signals transmitted over FIR Channels," IEEE Signal Processing Letters, vol. 2, pp. 99–102, 1995.
- [81] R. O. Schmidt, "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 34, pp. 276–280, 1986.
- [82] R. Roy and T. Kailath, "ESPRIT-Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques," IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Proc., vol. 37, pp. 984–995, 1989.
- [83] A.-J. van der Veen, S. Talwar, and A. Paulraj, "A Subspace Approach to Blind Space-Time Signal Processing for Wireless Communication Systems," IEEE Trans. Signal Proc., vol. 45, pp. 173–190, 1997.
- [84] X. Liu and N. D. Sidiropoulos, "Cramer-Rao Lower Bounds for Low-rank Decomposition of Multidimensional Arrays," IEEE Trans. Signal Proc., vol. 49, no. 9, pp. 2074–2086, Sep. 2001.
- [85] N. D. Sidiropoulos and G. Z. Dimic, "Blind Multiuser Detection in W-CDMA Systems with Large Delay Spread," IEEE Signal Proc. Letters, vol. 8, no. 3, pp. 87–89, March 2001.
- [86] A. de Almeida, G. Favier, and J. Mota, "PARAFAC-based unified tensor modeling for wireless communication systems with application to blind multiuser equalization," Signal Proc., vol. 87, pp. 337–351, 2007.
- [87] D. Nion and L. De Lathauwer, "An Enhanced Line Search Scheme for Complex-Valued Tensor Decompositions. application in ds-cdma," Elsevier Fast Com. on Sig. Proc., 2007, accepted.

- [88] —, “Line Search computation of the Block Factor Model for Blind Multi-User Access in Wireless Communications,” in Proc. IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC), Cannes, FR., 2006.
- [89] D. Marquardt, “An Algorithm for Least-Squares Estimation of non-linear Parameters,” vol. 11, pp. 431–441, 1963.
- [90] K. Madsen, H. B. Nielsen, and O. Tingleff, “Methods for non-linear Least Squares Problems,” Technical University of Denmark, 2004, second ed.
- [91] P. K. Hopke, P. Paatero, H. Jia, R. T. Ross, and R. A. Harshman, “Three-way (PARAFAC) Factor Analysis : Examination and Comparison of Alternative Computational Methods as applied to ill-conditioned data,” Chemom. Intell. Lab. Syst., vol. 43, pp. 25–42, 1998.
- [92] W. Rayens and W. Mitchell, “Two-Factor Degeneracies and a Stabilization of PARAFAC,” Chemom. Intell. Lab. Syst., vol. 38, pp. 173–181, 1997.
- [93] M. Haardt and J. Nossek, “Simultaneous Schur decomposition of several nonsymmetric matrices to achieve automatic pairing in multidimensional harmonic retrieval problems,” IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 46, no. 1, pp. 161–169, 1998.
- [94] E. Moreau, “A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation,” IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 49, no. 3, pp. 530–541, 2001.
- [95] D. Pham and J.-F. Cardoso, “Blind separation of instantaneous mixtures of non stationary sources,” IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 49, no. 9, pp. 1837–1848, 2001.
- [96] A. Yeredor, “Non-orthogonal joint diagonalization in the least-squares sense with application in blind source separation,” IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 50, no. 7, pp. 1545–1553, 2002.
- [97] E. Moreau, “Joint-diagonalization of cumulant tensors and source separation,” in in Proc. 10th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing (SSAP’2000), August 2000, pp. pp. 339–343.
- [98] J.-F. Cardoso, “Super-symmetric decomposition of the fourth-order cumulant tensor. Blind identification of more sources than sensors,” in Proc. IEEE ICASSP, vol. 5, Toronto, Canada, 1991, pp. 3109–3112.
- [99] P. Comon and B. Mourrain, “Decomposition of quantics in sums of powers of linear forms,” Signal Processing, Elsevier, vol. 53, no. 2, pp. 93–107, Sept. 1996, special issue on High-Order Statistics.
- [100] M. Rajih, P. Comon, and D. Slock, “A deterministic blind receiver for mimo ofdm systems,” in Proc. of SPAWC’06, Cannes, FR., July 2–5 2006.
- [101] T. Jiang and N. D. Sidiropoulos, “A direct blind receiver for simo and mimo ofdm systems subject to unknown frequency offset and multipaths,” in Proc. SPAWC 03, June 15–18 2003.
- [102] A. de Almeida, G. Favier, and J. Mota, “Generalized parafac model for multidimensional wireless communications with application to blind multiuser equalization,” in in Proc. ASILOMAR, Oct 30 – Nov 2 2005.

- [103] —, “*Space-time multiplexing codes : A tensor modeling approach.*” in Proc. SPAWC’06, July 2006.

Annexe A

Preuve du Théorème 6.2

Dans cette annexe nous démontrons le Théorème 6.2 du chapitre 6.

Théorème 6.2 *La décomposition en termes de rang-(2,2,1) d'un tenseur d'ordre 3 est génériquement unique si*

$$R \leq K \quad \text{et} \quad C_I^3 \cdot C_J^3 \geq (C_R^3 + 2C_R^2). \quad (\text{A.0.1})$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons utiliser plusieurs Lemmes intermédiaires.

Lemme 1 *Considérons $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{I \times LR}$ et $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times LR}$, partitionnées en R blocs $\mathbf{H}_r \in \mathbb{C}^{I \times L}$ et $\mathbf{S}_r \in \mathbb{C}^{J \times L}$. Génériquement, on a :*

$$\text{rank}(\text{vec}(\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{S}_1^T) \quad \cdots \quad \text{vec}(\mathbf{H}_R \cdot \mathbf{S}_R^T)) = \min(IJ, R).$$

Preuve du Lemme 1 :

Notons $\tilde{\mathbf{X}}$ la matrice de taille $JI \times R$ définie par $\tilde{\mathbf{X}} = [\text{vec}(\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{S}_1^T) \cdots \text{vec}(\mathbf{H}_R \cdot \mathbf{S}_R^T)]$. Notons $\tilde{R} = \text{rank}(\tilde{\mathbf{X}})$. Supposons que $\tilde{R} < \min(IJ, R)$. La démonstration est basée sur l'observation qu'une perturbation générique des vecteurs $\{\text{vec}(\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{S}_r^T)\}$, $r = 1 \dots R$, rend cet ensemble linéairement indépendant. Supposons, sans perte de généralité, que la matrice $\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{S}_1^T$ est dans l'espace vectoriel V généré par $\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{S}_r^T$, $r = 2, 3, \dots, R$. Il suffit de prouver qu'une perturbation générique de $\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{S}_1^T$ n'est pas dans V . Soit la matrice $V^\perp \in \mathbb{C}^{I \times J}$ appartenant au complément orthogonal de V , i.e., le produit scalaire de V^\perp et de toute matrice dans V est nul. Nous avons $\langle \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{S}_1^T, V^\perp \rangle = 0$. Notons par $\tilde{\mathbf{H}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{S}}_1^T$ la version perturbée de $\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{S}_1^T$. Génériquement, on a $\langle \tilde{\mathbf{H}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{S}}_1^T, V^\perp \rangle = \text{Trace}(\tilde{\mathbf{H}}_1^T \cdot V^\perp \cdot \tilde{\mathbf{S}}_1) \neq 0$, i.e., la perturbation a une composante orthogonale à V . Par conséquent, $\text{vec}(\tilde{\mathbf{H}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{S}}_1^T)$ a une composante orthogonale à $\text{vec}(\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{S}_r^T)$, $r = 2, 3, \dots, R$. ■

Lemme 2 Soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M$ des vecteurs linéairement indépendants de \mathbb{C}^{N^3} . Soient $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_R$ des vecteurs de \mathbb{C}^N . Si

$$R \leq N \quad \text{et} \quad (C_R^3 + 2C_R^2) + M \leq N^3, \quad (\text{A.0.2})$$

alors les vecteurs \mathbf{v}_m , $1 \leq m \leq M$, et les $C_R^3 + 2C_R^2$ vecteurs de l'ensemble

$$\{(\mathbf{c}_u \otimes \mathbf{c}_v \otimes \mathbf{c}_v) \mid 1 \leq u \neq v \leq R\} \cup \{(\mathbf{c}_u \otimes \mathbf{c}_v \otimes \mathbf{c}_w) \mid 1 \leq u < v < w \leq R\}$$

sont linéairement indépendants pour un choix générique de \mathbf{c}_r , $1 \leq r \leq R$.

Preuve du Lemme 2 :

Définissons

$$V = \{\mathbf{v}_m \mid 1 \leq m \leq M\},$$

$$\Gamma_R = \{(\mathbf{c}_u \otimes \mathbf{c}_v \otimes \mathbf{c}_v) \mid 1 \leq u \neq v \leq R\} \cup \{(\mathbf{c}_u \otimes \mathbf{c}_v \otimes \mathbf{c}_w) \mid 1 \leq u < v < w \leq R\},$$

et

$$\Gamma_{R-1} = \{(\mathbf{c}_u \otimes \mathbf{c}_v \otimes \mathbf{c}_v) \mid 1 \leq u \neq v \leq R-1\} \cup \{(\mathbf{c}_u \otimes \mathbf{c}_v \otimes \mathbf{c}_w) \mid 1 \leq u < v < w \leq R-1\}.$$

L'ensemble Γ_R contient $C_R^3 + 2C_R^2 = \frac{R(R-1)(R+4)}{6}$ vecteurs, et l'ensemble Γ_{R-1} en contient $C_{R-1}^3 + 2C_{R-1}^2 = \frac{(R-1)(R-2)(R+3)}{6}$.

Nous prouvons le Lemme 2 par récurrence. Nous montrons d'abord que le lemme est vrai pour $R = 2$. Ensuite, nous montrons qu'en supposant le lemme vrai pour $(M, R-1)$, il est encore vrai pour (M, R) si (A.0.2) est satisfait.

- **Initialisation.** Soit $V^\perp \in \mathbb{C}^{N^3}$ un vecteur orthogonal aux vecteurs de V . Pour initialiser l'induction, il suffit de montrer que $(\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_2)$ et $(\mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_1)$ ont tous les deux des composantes dans la direction de V^\perp . Définissons le tenseur d'ordre trois $\mathcal{V}^\perp \in \mathbb{C}^{N \times N \times N}$ par $(\mathcal{V}^\perp)_{n_1, n_2, n_3} = (V^\perp)_{(n_1-1)N^2 + (n_2-1)N + n_3}$. Nous avons alors $(\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_2)^T \cdot V^\perp = \mathcal{V}^\perp \bullet_1 \mathbf{c}_2 \bullet_2 \mathbf{c}_2 \bullet_3 \mathbf{c}_1$ et $(\mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_1)^T \cdot V^\perp = \mathcal{V}^\perp \bullet_1 \mathbf{c}_1 \bullet_2 \mathbf{c}_1 \bullet_3 \mathbf{c}_2$, qui sont génériquement non nuls.

- **Hypothèse de récurrence :** nous supposons maintenant que l'ensemble $V \cup \Gamma_R$ est linéairement dépendant. Nous prouvons que cet ensemble devient linéairement indépendant par une perturbation générique du vecteur \mathbf{c}_R . Nous procédons par contradiction : nous allons montrer que l'hypothèse de dépendance linéaire de $V \cup \Gamma_R$ induit la dépendance linéaire de $V \cup \Gamma_{R-1}$. Les matrices $[\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_{R-2}]$, $[\mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_{R-1}]$ et $[\mathbf{c}_3 \dots \mathbf{c}_R]$, de taille $N \times (R-2)$ sont génériquement de rang $R-2$ d'après l'hypothèse $R \leq N$. Par une propriété du produit de Kronecker, le rang de $[\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_{R-2}] \otimes [\mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_{R-1}] \otimes [\mathbf{c}_3 \dots \mathbf{c}_R]$ est égal à son nombre de colonnes. L'ensemble Γ_R , qui contient des colonnes de cette dernière matrice, est donc linéairement indépendant. Soit $\tilde{\mathbf{c}}_R$ une version perturbée de \mathbf{c}_R , qui n'est pas proportionnelle à \mathbf{c}_R . L'ensemble Γ_R est remplacé par $\tilde{\Gamma}_R$. Supposons que $V \cup \tilde{\Gamma}_R$ est encore linéairement dépendant. Génériquement, on peut supposer que \mathbf{v}_1 peut être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs dans $(V \setminus \{\mathbf{v}_1\}) \cup \Gamma_R$. On peut aussi supposer que \mathbf{v}_1 est une combinaison linéaire des vecteurs de $(V \setminus \{\mathbf{v}_1\}) \cup \tilde{\Gamma}_R$. En d'autres termes, \mathbf{v}_1 est dans l'intersection des sous-espaces W et \tilde{W} respectivement générés par $(V \setminus \{\mathbf{v}_1\}) \cup \Gamma_R$ et $(V \setminus \{\mathbf{v}_1\}) \cup \tilde{\Gamma}_R$. W est la somme du sous-espace généré par $(V \setminus \{\mathbf{v}_1\}) \cup \Gamma_{R-1}$ et du sous-espace $\{\Gamma_R \setminus \Gamma_{R-1}\}$ généré par $\{(\mathbf{c}_u \otimes \mathbf{c}_R \otimes \mathbf{c}_R) \mid 1 \leq u \leq R-1\} \cup \{(\mathbf{c}_R \otimes \mathbf{c}_v \otimes \mathbf{c}_v) \mid 1 \leq v \leq R-1\}$.

$\mathbf{c}_v) | 1 \leq v \leq R-1 \} \cup \{(\mathbf{c}_u \otimes \mathbf{c}_v \otimes \mathbf{c}_R) | 1 \leq u < v \leq R-1\}$. \tilde{W} est la somme du sous-espace généré par $(V \setminus \{\mathbf{v}_1\}) \cup \Gamma_{R-1}$ et du sous-espace $\{\tilde{\Gamma}_R \setminus \Gamma_{R-1}\}$ généré par $\{(\mathbf{c}_u \otimes \tilde{\mathbf{c}}_R \otimes \tilde{\mathbf{c}}_R) | 1 \leq u \leq R-1 \} \cup \{(\tilde{\mathbf{c}}_R \otimes \mathbf{c}_v \otimes \mathbf{c}_v) | 1 \leq v \leq R-1 \} \cup \{(\mathbf{c}_u \otimes \mathbf{c}_v \otimes \tilde{\mathbf{c}}_R) | 1 \leq u < v \leq R-1\}$. W ne peut pas être égal à \mathbb{C}^{N^3} puisque $\dim(W) \leq M-1 + C_3^R + 2C_2^R < N^3$; \tilde{W} ne peut pas non plus être égale à \mathbb{C}^{N^3} . Les vecteurs de l'ensemble $\{\Gamma_R \setminus \Gamma_{R-1}\} \cup \{\tilde{\Gamma}_R \setminus \Gamma_{R-1}\}$ sont des colonnes de la matrice $[\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_{R-1} \mathbf{c}_R \tilde{\mathbf{c}}_R] \otimes [\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_{R-1} \mathbf{c}_R \tilde{\mathbf{c}}_R] \otimes [\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_{R-1}]$, donc ces vecteurs sont linéairement indépendants. Nous en concluons que l'intersection de W et \tilde{W} est égal au sous-espace généré par $(V \setminus \{\mathbf{v}_1\}) \cup \Gamma_{R-1}$. Puisque \mathbf{v}_1 est dans l'intersection de W et \tilde{W} , il peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $(V \setminus \{\mathbf{v}_1\}) \cup \Gamma_{R-1}$. Cela signifie que l'ensemble $V \cup \Gamma_{R-1}$ est linéairement dépendant.

En résumé, nous avons montré que si l'on suppose $V \cup \Gamma_R$ linéairement dépendant, alors $V \cup \Gamma_{R-1}$ est linéairement dépendant. Par induction, si $V \cup \Gamma_{R-1}$ est linéairement indépendant, alors $V \cup \Gamma_R$ est linéairement indépendant, ce qui conclue la preuve. ■

Lemme 3 Soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M$ des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^{I^3 J^3}$. Soient $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_R$ des vecteurs dans \mathbb{C}^I et soient $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_R$ des vecteurs dans \mathbb{C}^J . Si

$$R \leq IJ \quad \text{et} \quad (C_3^R + 2C_2^R) + M \leq I^3 J^3, \quad (\text{A.0.3})$$

alors les vecteurs \mathbf{v}_m , $1 \leq m \leq M$, et les $C_3^R + 2C_2^R$ vecteurs de l'ensemble $\{(\mathbf{h}_u \otimes \mathbf{s}_u \otimes \mathbf{h}_v \otimes \mathbf{s}_v \otimes \mathbf{h}_w \otimes \mathbf{s}_w) | 1 \leq u \neq v \leq R\} \cup \{(\mathbf{h}_u \otimes \mathbf{s}_u \otimes \mathbf{h}_v \otimes \mathbf{s}_v \otimes \mathbf{h}_w \otimes \mathbf{s}_w) | 1 \leq u < v < w \leq R\}$ sont linéairement indépendants pour un choix générique de \mathbf{h}_r et \mathbf{s}_r , $1 \leq r \leq R$.

Preuve du Lemme 3 :

La preuve est analogue à celle du Lemme 2. Le rôle de $[\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_{R-2}]$, $[\mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_{R-1}]$ et $[\mathbf{c}_3 \dots \mathbf{c}_R]$ est maintenant joué par $[\mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{s}_1 \dots \mathbf{h}_{R-2} \otimes \mathbf{s}_{R-2}]$, $[\mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{s}_2 \dots \mathbf{h}_{R-1} \otimes \mathbf{s}_{R-1}]$ et $[\mathbf{h}_3 \otimes \mathbf{s}_3 \dots \mathbf{h}_R \otimes \mathbf{s}_R]$. Ces dernières sont génériquement de rang plein si $R \leq IJ$ d'après le Lemme 1. ■

Nous avons désormais assez d'éléments pour prouver le théorème 6.2.

Preuve du Théorème 6.2 : La seconde inégalité de ce théorème, $C_I^3 \cdot C_J^3 \geq (C_R^3 + 2C_R^2)$, implique que $R \leq IJ$, et la combinaison avec la première inégalité, $R \leq K$, implique que $R \leq \min(IJ, K)$, ce qui est une condition nécessaire pour que $\tilde{\mathbf{X}}$ et \mathbf{A} soient génériquement de rang R (cf equation 6.9). Nous allons maintenant montrer que la seconde inégalité garantit génériquement l'indépendance linéaire de l'ensemble Ω défini par l'équation (6.22).

Considérons l'application bijective \mathcal{F} suivant permettant d'écrire les vecteurs \mathbf{x} de $\mathbb{C}^{I^3 J^3}$ sous forme de tenseur de $\mathbb{C}^{I \times I \times I \times J \times J \times J}$:

$$(\mathcal{F}(\mathbf{x}))_{ijklmn} = \mathbf{x}_{(i-1)I^2 J^3 + (j-1)IJ^3 + (k-1)J^3 + (l-1)J^2 + (m-1)J + n}.$$

L' image du tenseur $\Phi(\mathbf{H}_u \cdot \mathbf{S}_u^T, \mathbf{H}_v \cdot \mathbf{S}_v^T, \mathbf{H}_w \cdot \mathbf{S}_w^T) \in \mathbb{C}^{I \times I \times I \times J \times J \times J}$ par l'application inverse \mathcal{F}^{-1} est un vecteur de taille $I^3 J^3$ défini par :

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{-1}(\Phi(\mathbf{H}_u \cdot \mathbf{S}_u^T, \mathbf{H}_v \cdot \mathbf{S}_v^T, \mathbf{H}_w \cdot \mathbf{S}_w^T)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\Phi(\sum_{l_1=1}^{L=2} [\mathbf{H}_u]_{:,l_1} \cdot [\mathbf{S}_u]_{:,l_1}^T, \sum_{l_2=1}^{L=2} [\mathbf{H}_v]_{:,l_2} \cdot [\mathbf{S}_v]_{:,l_2}^T, \sum_{l_3=1}^{L=2} [\mathbf{H}_w]_{:,l_3} \cdot [\mathbf{S}_w]_{:,l_3}^T)) \quad (\text{A.0.4}) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\sum_{l_1, l_2, l_3=1}^2 \Phi([\mathbf{H}_u]_{:,l_1} \cdot [\mathbf{S}_u]_{:,l_1}^T, [\mathbf{H}_v]_{:,l_2} \cdot [\mathbf{S}_v]_{:,l_2}^T, [\mathbf{H}_w]_{:,l_3} \cdot [\mathbf{S}_w]_{:,l_3}^T)), \end{aligned}$$

où la propriété de trilinearité de l'application Φ a été utilisée. Nous notons \mathbf{H}_{u,l_1} , \mathbf{H}_{v,l_2} et \mathbf{H}_{w,l_3} les vecteurs $[\mathbf{H}_u]_{:,l_1}$, $[\mathbf{H}_v]_{:,l_2}$ et $[\mathbf{H}_w]_{:,l_3}$, de taille $I \times 1$. De même, nous notons \mathbf{S}_{u,l_1} , \mathbf{S}_{v,l_2} et \mathbf{S}_{w,l_3} les vecteurs $[\mathbf{S}_u]_{:,l_1}$, $[\mathbf{S}_v]_{:,l_2}$ et $[\mathbf{S}_w]_{:,l_3}$, de taille $J \times 1$.

En utilisant la définition de l'application Φ du Théorème 6.1, l'équation (A.0.4) peut alors s'écrire comme :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}^{-1}(\Phi(\mathbf{H}_u \cdot \mathbf{S}_u^T, \mathbf{H}_v \cdot \mathbf{S}_v^T, \mathbf{H}_w \cdot \mathbf{S}_w^T)) \\
&= \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{u,l_1} \otimes \mathbf{H}_{v,l_2} \otimes \mathbf{H}_{w,l_3} \\ -\mathbf{H}_{u,l_1} \otimes \mathbf{H}_{w,l_3} \otimes \mathbf{H}_{v,l_2} \\ +\mathbf{H}_{v,l_2} \otimes \mathbf{H}_{w,l_3} \otimes \mathbf{H}_{u,l_1} \\ -\mathbf{H}_{v,l_2} \otimes \mathbf{H}_{u,l_1} \otimes \mathbf{H}_{w,l_3} \\ +\mathbf{H}_{w,l_3} \otimes \mathbf{H}_{u,l_1} \otimes \mathbf{H}_{v,l_2} \\ -\mathbf{H}_{w,l_3} \otimes \mathbf{H}_{v,l_2} \otimes \mathbf{H}_{u,l_1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{u,l_1} \otimes \mathbf{S}_{v,l_2} \otimes \mathbf{S}_{w,l_3} \\ -\mathbf{S}_{u,l_1} \otimes \mathbf{S}_{w,l_3} \otimes \mathbf{S}_{v,l_2} \\ +\mathbf{S}_{v,l_2} \otimes \mathbf{S}_{w,l_3} \otimes \mathbf{S}_{u,l_1} \\ -\mathbf{S}_{v,l_2} \otimes \mathbf{S}_{u,l_1} \otimes \mathbf{S}_{w,l_3} \\ +\mathbf{S}_{w,l_3} \otimes \mathbf{S}_{u,l_1} \otimes \mathbf{S}_{v,l_2} \\ -\mathbf{S}_{w,l_3} \otimes \mathbf{S}_{v,l_2} \otimes \mathbf{S}_{u,l_1} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^2 \left[\left(\mathbf{I}_{I^3 \times I^3} - \mathbf{\Pi}_{u,v,w}^{(I^3)} + \mathbf{\Pi}_{v,w,u}^{(I^3)} - \mathbf{\Pi}_{v,u,w}^{(I^3)} + \mathbf{\Pi}_{w,u,v}^{(I^3)} - \mathbf{\Pi}_{w,v,u}^{(I^3)} \right) \cdot (\mathbf{H}_{u,l_1} \otimes \mathbf{H}_{v,l_2} \otimes \mathbf{H}_{w,l_3}) \right] \\
&\otimes \left[\left(\mathbf{I}_{J^3 \times J^3} - \mathbf{\Pi}_{u,v,w}^{(J^3)} + \mathbf{\Pi}_{v,w,u}^{(J^3)} - \mathbf{\Pi}_{v,u,w}^{(J^3)} + \mathbf{\Pi}_{w,u,v}^{(J^3)} - \mathbf{\Pi}_{w,v,u}^{(J^3)} \right) \cdot (\mathbf{S}_{u,l_1} \otimes \mathbf{S}_{v,l_2} \otimes \mathbf{S}_{w,l_3}) \right] \\
&\stackrel{def}{=} \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^2 \left[\Lambda^{I^3} \cdot (\mathbf{H}_{u,l_1} \otimes \mathbf{H}_{v,l_2} \otimes \mathbf{H}_{w,l_3}) \right] \otimes \left[\Lambda^{J^3} \cdot (\mathbf{S}_{u,l_1} \otimes \mathbf{S}_{v,l_2} \otimes \mathbf{S}_{w,l_3}) \right] \\
&= \left(\Lambda^{I^3} \otimes \Lambda^{J^3} \right) \cdot \left(\sum_{l_1, l_2, l_3=1}^2 \mathbf{H}_{u,l_1} \otimes \mathbf{H}_{v,l_2} \otimes \mathbf{H}_{w,l_3} \otimes \mathbf{S}_{u,l_1} \otimes \mathbf{S}_{v,l_2} \otimes \mathbf{S}_{w,l_3} \right) \\
&\stackrel{def}{=} \mathbf{G} \cdot \left(\sum_{l_1, l_2, l_3=1}^2 \mathbf{H}_{u,l_1} \otimes \mathbf{H}_{v,l_2} \otimes \mathbf{H}_{w,l_3} \otimes \mathbf{S}_{u,l_1} \otimes \mathbf{S}_{v,l_2} \otimes \mathbf{S}_{w,l_3} \right), \tag{A.0.5}
\end{aligned}$$

où $\mathbf{\Pi}_{u,v,w}^{(I^3)} \in \mathbb{R}^{I^3 \times I^3}$ est une matrice de permutation relative à la matrice de référence $\mathbf{I}_{I^3 \times I^3} = \mathbf{\Pi}_{u,v,w}^{(I^3)}$. L'indépendance linéaire de $\{\Phi(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_w) \mid 1 \leq u \neq v \leq R\} \cup \{\Phi(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_w) \mid 1 \leq u < v < w \leq R\}$ est équivalente à l'indépendance linéaire des vecteurs images. Ces derniers sont linéairement indépendants si et seulement si l'intersection du noyau de \mathbf{G} et du sous-espace généré par les vecteurs

$$\left\{ \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^2 \mathbf{H}_{u,l_1} \otimes \mathbf{H}_{v,l_2} \otimes \mathbf{H}_{v,l_3} \otimes \mathbf{S}_{u,l_1} \otimes \mathbf{S}_{v,l_2} \otimes \mathbf{S}_{v,l_3} \mid 1 \leq u \neq v \leq R \right\} \cup \left\{ \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^2 \mathbf{H}_{u,l_1} \otimes \mathbf{H}_{v,l_2} \otimes \mathbf{H}_{w,l_3} \otimes \mathbf{S}_{u,l_1} \otimes \mathbf{S}_{v,l_2} \otimes \mathbf{S}_{w,l_3} \mid 1 \leq u < v < w \leq R \right\}$$

contient seulement le vecteur nul. En d'autres termes, une base du noyau de \mathbf{G} et ces derniers vecteurs doivent former un ensemble linéairement indépendant. La dimension du noyau de \mathbf{G} est $I^3 J^3 - \text{rank}(\mathbf{G})$.

Pour tout triplet (l_1, l_2, l_3) avec des valeurs dans $(\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 2\})$, d'après le Lemme 3, l'ensemble formé par une base du noyau de \mathbf{G} et les $(C_R^3 + 2C_R^2)$ vecteurs $\mathbf{H}_{u,l_1} \otimes \mathbf{H}_{v,l_2} \otimes \mathbf{H}_{w,l_3} \otimes \mathbf{S}_{u,l_1} \otimes \mathbf{S}_{v,l_2} \otimes \mathbf{S}_{w,l_3}$ est génériquement indépendant si

$$I^3 J^3 - \text{rank}(\mathbf{G}) + (C_R^3 + 2C_R^2) \leq I^3 J^3 \Leftrightarrow C_R^3 + 2C_R^2 \leq \text{rank}(\mathbf{G}). \tag{A.0.6}$$

Puisque les matrices \mathbf{H}_r et \mathbf{S}_r , $r = 1 \dots R$, sont génériquement de rang plein, les $(C_R^3 + 2C_R^2)$ vecteurs $\sum_{l_1, l_2, l_3=1}^2 \mathbf{H}_{u,l_1} \otimes \mathbf{H}_{v,l_2} \otimes \mathbf{H}_{w,l_3} \otimes \mathbf{S}_{u,l_1} \otimes \mathbf{S}_{v,l_2} \otimes \mathbf{S}_{w,l_3}$ sont linéairement indépendants

si bien que l'ensemble formé par ces vecteurs et une base du noyau de \mathbf{G} est génériquement linéairement indépendant sous la même condition que (A.0.6).

Les matrices Λ^{I^3} et Λ^{J^3} sont construites uniquement à partir de matrices de permutation et on peut montrer que $\text{rank}(\Lambda^{I^3}) = \frac{I(I-1)(I-2)}{6}$ et $\text{rank}(\Lambda^{J^3}) = \frac{J(J-1)(J-2)}{6}$. Par une propriété du produit de Kronecker, on obtient

$$\text{rank}(\mathbf{G}) = \frac{I(I-1)(I-2)}{6} \cdot \frac{J(J-1)(J-2)}{6}. \quad (\text{A.0.7})$$

La combinaison de (A.0.6) et (A.0.7) montre que l'ensemble Ω est génériquement linéairement indépendant si et seulement si

$$C_R^3 + 2C_R^2 \leq \frac{I(I-1)(I-2)}{6} \cdot \frac{J(J-1)(J-2)}{6},$$

ce qui complète la preuve du Théorème 6.2. ■

Annexe B

Eléments de Preuve de la Conjecture 6.3

Dans cette annexe nous donnons les éléments de preuve de la Conjecture 6.3 du chapitre 6. La démarche est la même que pour la preuve du Théorème 6.2, exceptée que la généralisation à $L > 2$ implique des manipulations algébriques plus complexes.

Conjecture 6.3 *La décomposition en termes de rang-(L,L,1) d'un tenseur d'ordre 3 est génériquement unique si*

$$R \leq K \quad \text{et} \quad C_I^{L+1} \cdot C_J^{L+1} \geq C_{R+L}^{L+1} - R. \quad (\text{B.0.1})$$

Cette conjecture généralise le cas particulier $L = 2$ du Théorème 6.2 à toutes les valeurs de L . Pour démontrer ce théorème, nous utilisons plusieurs Lemmes intermédiaires.

Lemme 4 *Soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M$ des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{C}^{N^{L+1}}$. Soit Ω_c l'ensemble des $(C_{R+L}^{L+1} - R)$ vecteurs $\{\mathbf{c}_{u_1} \otimes \mathbf{c}_{u_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{c}_{u_{L+1}} \mid 1 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{L+1} \leq R\}$ construit ainsi :*

- les vecteurs $\mathbf{c}_{u_1} \otimes \mathbf{c}_{u_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{c}_{u_{L+1}}$, avec $u_1 = u_2 = \dots = u_{L+1}$, ne sont pas inclus dans Ω_c .
- les vecteurs générés par toute permutation des indices u_1, u_2, \dots, u_{L+1} de $\mathbf{c}_{u_1} \otimes \mathbf{c}_{u_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{c}_{u_{L+1}}$ ne sont pas inclus dans Ω_c .

Si

$$R \leq N \quad \text{et} \quad (C_{R+L}^{L+1} - R) + M \leq N^{L+1}, \quad (\text{B.0.2})$$

alors les vecteurs \mathbf{v}_m , $1 \leq m \leq M$, et les C_{R+L}^{L+1} vecteurs de l'ensemble Ω_c sont linéairement indépendant pour un choix générique de \mathbf{c}_r , $1 \leq r \leq R$.

Note : Le nombre d'éléments C_{R+L}^{L+1} correspond au nombre de possibilités pour choisir $L + 1$ objets parmi R objets différents, avec la possibilité de choisir plusieurs fois le même objet (il s'agit de combinaisons avec répétition). On soustrait alors R à C_{R+L}^{L+1} car R est le nombre de façons de choisir $L + 1$ fois le même objet, i.e. $u_1 = u_2 = \dots = u_{L+1}$.

Lemme 5 Soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M$ des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{C}^{(IJ)^{L+1}}$. Soient $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_R$ des vecteurs de \mathbb{C}^I et $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_R$ des vecteurs de \mathbb{C}^J . Si

$$R \leq IJ + L \quad \text{and} \quad (C_{R+L}^{L+1} - R) + M \leq (IJ)^{L+1}, \quad (\text{B.0.3})$$

alors les vecteurs

\mathbf{v}_m , $1 \leq m \leq M$, et les $(C_{R+L}^{L+1} - R)$ vecteurs de l'ensemble $\Omega_{ab} = \{(\mathbf{a}_{u_1} \otimes \mathbf{b}_{u_1} \otimes \mathbf{a}_{u_2} \otimes \mathbf{b}_{u_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_{u_{L+1}} \otimes \mathbf{b}_{u_{L+1}}) \mid 1 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{L+1} \leq R\}$ construit comme suit :

- les vecteurs $\mathbf{a}_{u_1} \otimes \mathbf{b}_{u_1} \otimes \mathbf{a}_{u_2} \otimes \mathbf{b}_{u_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_{u_{L+1}} \otimes \mathbf{b}_{u_{L+1}}$, avec $u_1 = u_2 = \dots = u_{L+1}$ ne sont pas inclus dans Ω_{ab}

- les vecteurs générés par toute permutation des indices u_1, u_2, \dots, u_{L+1} de $\mathbf{a}_{u_1} \otimes \mathbf{b}_{u_1} \otimes \mathbf{a}_{u_2} \otimes \mathbf{b}_{u_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_{u_{L+1}} \otimes \mathbf{b}_{u_{L+1}}$ ne sont pas inclus dans Ω_{ab}

sont linéairement indépendants pour un choix générique de \mathbf{a}_r et \mathbf{b}_r , $1 \leq r \leq R$.

En suivant la même démarche que précédemment et en combinant les Lemmes 4 et 5, on peut ensuite prouver la Conjecture 6.3.